

PROBLEMAS DEL LIBRO
MÉTODOS Y TEORÍA

PARA LA RESOLUCIÓN
DE PROBLEMAS DE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS
CON APLICACIÓN A MÁS DE 400 PROBLEMAS,

DE JULIUS PETERSEN

FRANCISCO JAVIER GARCÍA CAPITÁN, 2004

Índice general

I	Teoría y Enunciados	3
1.	Lugares Geométricos	8
1.1.	Lugares geométricos de puntos	8
II	Soluciones	21

Parte I

Teoría y Enunciados

Introducción de Petersen

Las proposiciones de Geometría se presentan bajo dos formas distintas. Unas expresan que una figura, que ha sido trazada de cierta manera, satisface ciertas condiciones. Otras piden que se trace (que se construya) una figura de modo que satisfaga ciertas condiciones dadas. En el primer caso, tenemos un *teorema*; en el segundo, un *problema*.

Como la solución de los problemas debe traducirse gráficamente en un dibujo, hay que recurrir al empleo de algunos instrumentos. Habitualmente, nos servimos sólo de la regla, con la ayuda de la cual podemos trazar una recta que pasa por dos puntos dados, y del compás, que permite describir alrededor de un centro dado una circunferencia de radio dado. Entonces, cualquier solución constará de estas dos operaciones (repetidas una o más veces).

Esta restricción tiene como consecuencia que muchos problemas, simples en apariencia, no podrán ser resueltos (trisección del ángulo, la cuadratura del círculo, etc.). En general, puede demostrarse que ello ocurrirá cuando el cálculo conduzca a ecuaciones que no puedan reducirse al primero o al segundo grados.

Un problema está *sobredeterminado*, cuando la figura buscada está sometida a más condiciones que las necesarias para determinarlo; es *determinado*, cuando contiene sólo un número finito de soluciones; por fin es *indeterminado*, cuando admite un número infinito de soluciones.

Para resolver un problema determinado, es necesario:

1. Efectuar la construcción.
2. Demostrar que es exacta.

3. Discutir la solución, es decir indicar los límites entre los cuales deben estar comprendidos los datos para que el problema admita 0, 1, 2, ... soluciones.

Entre los problemas indeterminados, los que se volverían determinados por la añadidura de una sola condición más, presentan un interés muy particular. Aunque un problema igual tuviera una infinidad de soluciones, no será satisfecho por una figura arbitraria; sino que todas sus soluciones se agruparán con una cierta manera, determinada por las condiciones dadas. Así un punto es determinado cuando debe satisfacer a dos condiciones dadas; si se le impone sólo a una única, se vuelve indeterminado; pero todos los puntos que satisfacen esta última condición se encontrarán sobre una línea recta o curva; le damos el nombre de lugar geométrico de los puntos que satisfacen a esta condición. Lo mismo ocurre con una figura para cuya determinación falta una condición; porque en general cada punto de la figura se encontrará en el mismo caso, de manera que cada uno de ellos la tendrá por su lugar geométrico.

La Geometría Analítica proporciona un método completamente general para la resolución de los problemas de geometría. Pero por esto mismo que se aplica uno y el mismo método a los problemas más diferentes, es natural que haya que hacer grandes rodeos. Así, en la Geometría Analítica, consideramos las distancias de los puntos de una pareja de ejes que, en general, en absoluto nada tienen que ver en la cuestión. Además, aplicando este método, llegamos fácilmente a hacer mecánicamente los cálculos, sin que podamos siempre interpretar geoméricamente las ecuaciones que obtenemos. Por fin, y es posiblemente la razón más seria, estas últimas llegan fácilmente a un grado de complicación tal, que no es posible resolverlas en la práctica.

Debido a estas dificultades que se encuentra en la aplicación directa de la GEOMETRÍA DE DESCARTES, recurriremos a una gran cantidad de métodos particulares (basados en el empleo de diferentes sistemas de coordenadas, etc.) que permiten resolver individualmente los problemas de manera más natural y más elegante; pero la dificultad se trasladó ahora sobre la elección del método. Creamos no obstante así una transición entre los procedimientos algebraicos y los puramente geométricos. En estos últimos, tratamos de encontrar la solución del problema, estudiando por la vía geométrica cuales son los enlaces que existen entre los elementos dados la figura y aquellos a los que se busca. Para facilitar estas investigaciones, comenzamos en todos los

casos por dibujar una figura que representa la solución buscada y tratamos de estudiarla con la ayuda de los teoremas conocidos de la Geometría.

¿No es cierto, en el caso en un gran número de los problemas más simples, que todo se reduce a la determinación de un punto desconocido? El método que se debe aplicar emana inmediatamente de lo que precede.

Consideramos, de forma aislada, las diferentes condiciones debe satisfacer el punto buscado; a cada una de ellas corresponderá un lugar geométrico; y si son rectas o círculos, el problema está resuelto. Porque el punto deberá encontrarse a la vez sobre cada uno de ambos lugares, debe encontrarse en los puntos donde se cortan.

Si los lugares geométricos son dos rectas, el problema admite sólo una solución y puede volverse imposible sólo si las líneas son paralelas. Si son dos circunferencias o una circunferencia y una recta, el problema admite dos soluciones cuando se cortan, uno cuando son tangentes; se vuelve imposible cuando son exteriores una a otra. Hay una diferencia cualitativa entre este caso y el precedente, donde la imposibilidad estaba sólo una cuestión de límite.

Cuando los lugares geométricos son otras curvas, directamente no podemos más emplearlos para las construcciones y hay que repetir la cuestión de otra manera. Hay que no obstante observar que un punto que es dado por la intersección de una recta y de una cónica posiblemente determinado por medio de una recta y por medio de una circunferencia, mientras que la construcción no puede más efectuarse si el punto está determinado por la intersección de dos cónicas independientes una de la otra.

El método que se acaba de indicar para los problemas más simples, puede extenderse a los más complicados. La regla sería la siguiente:

Consideraremos inexistente una de las condiciones impuestas a la figura, y buscaremos los lugares geométricos de los puntos de la figura hecha así indeterminada.

Se comprende fácilmente que es de la mayor importancia el conocer muchos lugares geométricos, como serán rectas o circunferencias. En el primer capítulo, daremos los más importantes de ellos, con un desarrollo detallado de las principales reglas enunciadas más arriba.

Cuando no se puedan aplicar inmediatamente los lugares geométricos, la regla que hay que seguir será ésta:

De la figura trazada deduciremos otra en la que el enlace entre los elementos dados y aquellos que se buscan se vea más cómodamente.

Trataremos este tema en el segundo capítulo.

En lo que sigue, para abreviar, designaremos un triángulo por ABC y las longitudes de sus lados por a, b, c . La altura y mediana por correspondientes a a serán h_a y m_a . La longitud de la bisectriz por A será w_a . Los números r y ρ son los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, mientras que ρ_a, ρ_b, ρ_c son los radios de las circunferencias exinscritas (la circunferencia de centro ρ_a es tangente a a y a las prolongaciones de b y c).

Cuando se hable de un cuadrilátero $ABCD$, se representarán los vértices en el orden en el que se enuncian.

$\angle(a, b)$ representará el ángulo comprendido entre las líneas a y b .

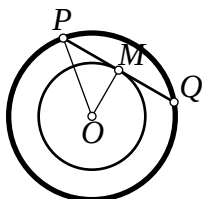
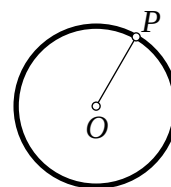
Capítulo 1

Lugares Geométricos

1.1. Lugares geométricos de puntos

a. El lugar geométrico de todos los puntos que están a una distancia dada de un punto dado es una circunferencia que tiene por centro al punto dado y por radio a la distancia dada.

Esta es la definición de circunferencia.

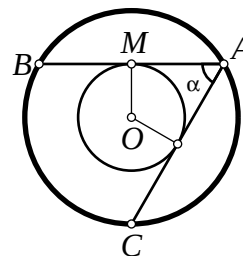


Corolario 1. El lugar geométrico de los extremos de segmentos tangentes de la misma longitud a una circunferencia es otra circunferencia concéntrica a la primera.

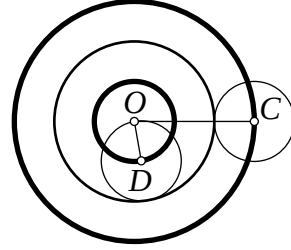
En efecto, si el segmento de tangente tiene una longitud constante a , en la figura tendremos $OP^2 = OQ^2 = OM^2 + MQ^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = cte$. Por tanto, P está en una circunferencia de centro O .

Corolario 2. El lugar geométrico de los puntos cuyo par de tangentes comunes a una circunferencia forman el mismo ángulo es una circunferencia concéntrica a la primera.

Ya que si las tangentes AB y AC forman un ángulo constante α , el triángulo OMA rectángulo en M tendrá constantes el lado $OM = r$ y el ángulo $OAM = \frac{\alpha}{2}$. Por tanto también será constante el lado OA y el punto O estará en una circunferencia de centro O .

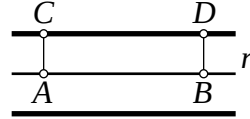


Corolario 3. El lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias de radio dado, tangentes a una circunferencia dada, está formado por dos circunferencias concéntricas a la circunferencia dada, cuyos radios son la suma y la diferencia de los radios dados.



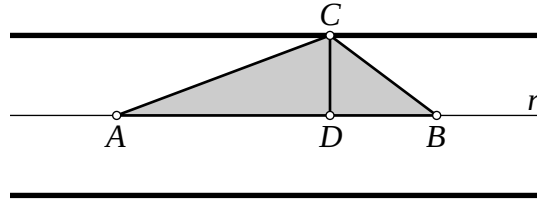
Ya que si una circunferencia con centro C y radio r es tangente exteriormente a una circunferencia de centro O y radio R , entonces $OC = R + r = \text{cte.}$ Y si una circunferencia con radio D es tangente interiormente a una circunferencia de centro O y radio R , entonces $OD = R - r = \text{cte.}$

b. El lugar geométrico de todos los puntos que están a una distancia dada de una recta dada esta formado por dos rectas, paralelas a la recta dada y situadas a la distancia dada de ellas.



Si C y D son puntos a distancia igual de la recta r , tendremos que CA y DB son ambos perpendiculares a AB , por lo que son paralelos e iguales, siendo por tanto CD paralelo a AB .

Corolario. El lugar geométrico de todos los triángulos equivalentes con la misma base es una recta paralela a esa base; lo mismo para los triángulos con la misma altura.



En la figura es $(ABC) = \frac{1}{2}AB \cdot CD$. Si AB es constante, también lo será CD , por lo que la distancia de C a AB es constante.

c. El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos puntos dados es una recta perpendicular a la recta que une los dos puntos y pasa por su punto medio.

d. El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos rectas dadas está formado por dos rectas perpendiculares

entre sí que bisecan los ángulos comprendidos entre las dos rectas dadas.

e. El lugar geométrico de todos los puntos tales que las rectas que lo unen con los extremos de un segmento dado comprenden un ángulo dado, es un arco de circunferencia que tiene por cuerda al segmento dado. Se le llama *arco capaz* del ángulo dado y se dice que que el segmento *se ve* desde todos puntos del arco bajo un ángulo dado.

Si un punto del arco cumple la propiedad en cuestión, también la cumplirán todos los demás, ya que todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales. Si trazamos una recta que sea tangente al arco en uno de los extremos del segmento (o cuerda), la recta formará con la cuerda un ángulo igual al ángulo dado. Se deduce entonces la construcción siguiente: por un extremo del segmento, trazamos una recta que forme con él un ángulo igual al ángulo dado. Esta recta será una tangente, por lo que una perpendicular por el punto de contacto contendrá al centro del arco buscado, que también estará en la mediatriz del segmento.

El arco es una semicircunferencia, cuando el ángulo dado es recto.

Cuando no se sabe en qué lado de la línea dada debe encontrarse el punto buscado, hay que construir dos arcos capaces del ángulo dado, uno por cada lado de la línea. Los dos otros arcos, que completan las dos circunferencias, corresponden al suplemento del ángulo dado.

Si se trata del ángulo que se extiende de una línea a otra y si se le da signo, definiendo como positiva una de las dos direcciones de rotación, el lugar geométrico será una circunferencia completa. Dados los puntos A y B , el ángulo comprendido desde la línea por A hasta la línea por B es igual al ángulo desde la tangente por A hasta AB .

Corolario 1. El lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas trazadas por un punto dado es una circunferencia, ya que al unir los puntos medios de las cuerdas con el centro de la circunferencia y con el punto dado se forma un ángulo recto.

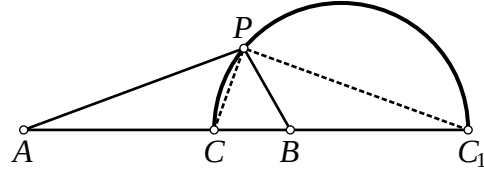
Corolario 2. Consideramos los triángulos ABC inscritos en una circunferencia, con lado común AB . El lugar geométrico de las circunferencias inscritas en estos triángulos es un arco de circunferencia que tiene a AB como cuerda y al punto medio del arco AB como centro. El resto de la circunferencia es el lugar geométrico de las circunferencias exinscritas. Consideramos

los triángulos ABC inscritos en una circunferencia, con lado común AB . El lugar geométrico de las circunferencias inscritas en estos triángulos es un arco de circunferencia que tiene a AB como cuerda y al punto medio del arco AB como centro. El resto de la circunferencia es el lugar geométrico de las circunferencias exinscritas. En efecto, de cada uno de los centros en cuestión se verá el segmento AB bajo ángulos iguales a $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}C$ y $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}C$, así que AB se verá desde el punto medio del arco AB bajo un ángulo igual a $\pi - C$.

f. El lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias a dos puntos dados estén en una razón dada $m : n$ es una circunferencia.

Sean A y B los puntos dados, P uno de los puntos buscados. Tracemos las bisectrices interiores y exteriores del $\angle APB$, PC y PC_1 . Tenemos

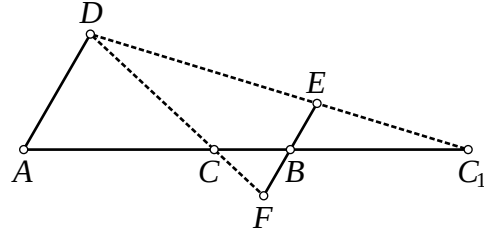
$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{m}{n}; \quad \angle CPC_1 = \frac{\pi}{2}.$$



Los puntos C y C_1 dividen entonces el segmento AB interiormente y exteriormente según la razón dada y son los mismos para cualquier P . Como el segmento CC_1 se ve desde el punto P bajo un ángulo recto, el lugar geométrico de P será (según **e**) una circunferencia que tenga a CC_1 por diámetro.

Se dice que los puntos C y C_1 dividen armónicamente en la razón $m : n$ y el problema se reduce entonces a éste:

Dividir armónicamente un segmento dado en una razón dada.



Esta construcción se efectúa en la figura adjunta. En ella, AD y BE son paralelos y están en la razón dada. BF es igual a BE . DF y DE cortan entonces a AB en los puntos buscados.

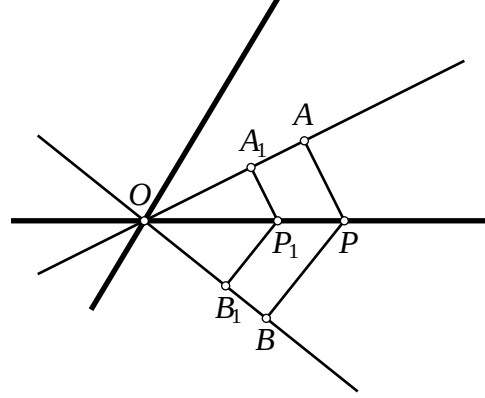
c es un caso particular de **f** en el que $m = n$.

g. El lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias a dos rectas dadas están en una razón dada $m : n$ está formado por dos rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas dadas.

Sean OA y OB las rectas dadas. Si un punto P cumple la propiedad requerida, también la cumplirán todos los puntos de la recta OP . Si P_1 es uno de ellos, entonces tenemos

$$\frac{OP_1}{OP} = \frac{A_1P_1}{AP} = \frac{B_1P_1}{BP}$$

o bien $\frac{A_1P_1}{B_1P_1} = \frac{AP}{BP}$.



La recta buscada puede trazarse conocido el punto, y éste puede determinarse fácilmente con la ayuda de **b** tomando arbitrariamente ambas distancias en la razón dada. La otra línea se trazará de la misma manera; se encuentra en el suplemento de AOB . Estas cuatro líneas trazadas por O forman un *haz armónico*. En efecto, la intersección de ellas con cualquier recta serán cuatro puntos armónicos.

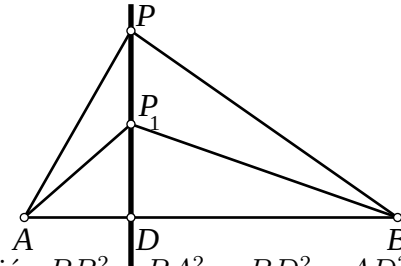
d es un caso particular de **g** en el que $m = n$.

Corolario. Dadas dos rectas AB y CD , buscamos un punto P tal que $\triangle PAB$ y $\triangle PCD$ estén en una razón dada; el lugar geométrico de P es el mismo que el anterior, ya que la razón de las alturas es constante.

h. El lugar geométrico de los puntos, tales que los cuadrados de las distancias a dos puntos dados es una constante a^2 , es una recta perpendicular a la recta que une los dos puntos.

Sean A y B los puntos dados, P uno de los puntos buscados y PD una perpendicular a AB . Cualquier punto P_1 de PD cumplirá la propiedad requerida, ya que

$$\begin{cases} AP_1^2 = AD^2 + P_1D^2 \\ BP_1^2 = BD^2 + P_1D^2 \end{cases}$$

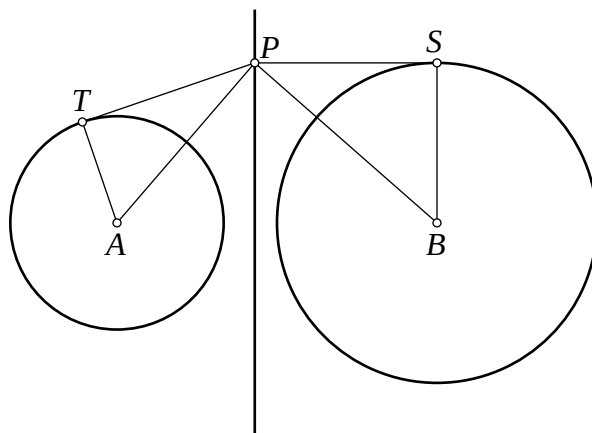


de donde $P_1B^2 - P_1A^2 = BD^2 - AD^2$ y también $PB^2 - PA^2 = BD^2 - AD^2$.

Construiremos un triángulo rectángulo donde uno de los lados sea a y trazaremos circunferencias con centros A y B y radios respectivos la hipotenusa y el otro lado del triángulo. La recta buscada pasará por los puntos de

intersección de las dos circunferencias. Aquí hemos supuesto que P está más alejado de P que de A .

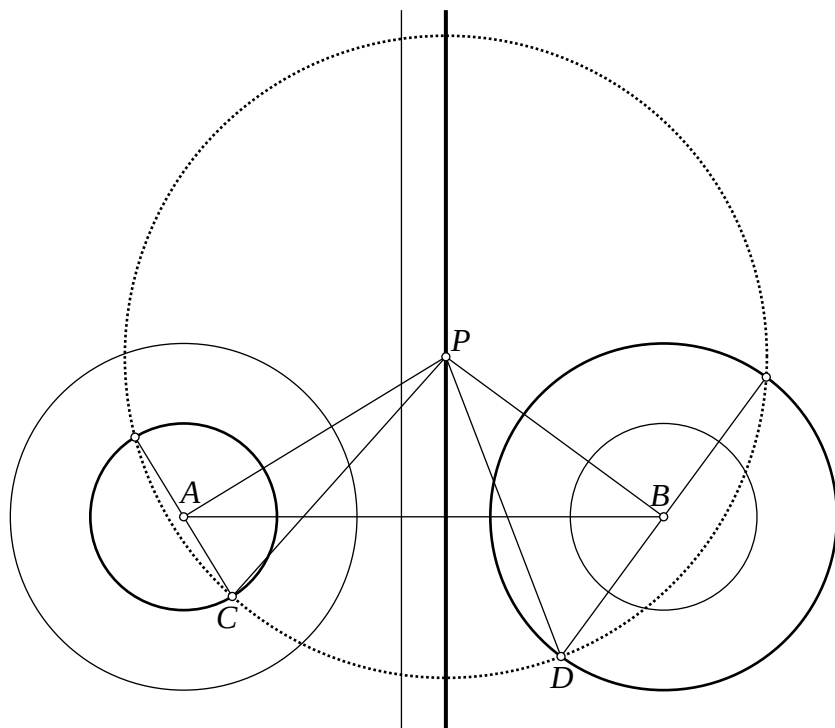
Corolario 1. El lugar geométrico de todos los puntos de donde son iguales las tangentes trazadas a dos circunferencias (o para los que son iguales las potencias respecto de ambas circunferencias) es una recta perpendicular a la recta que une los centros (eje radical, eje de igual potencia de las circunferencias); vemos fácilmente en efecto que las distancias de los puntos de los centros de las circunferencias deben ser tales que la diferencia de sus cuadrados sea igual a diferencia de los cuadrados de los radios.



$$PB^2 - PA^2 = (PS^2 + TB^2) - (PT^2 + SA^2) = r_2^2 - r_1^2.$$

Cuando las circunferencias se cortan, el eje radical pasa por sus puntos de intersección. Los ejes radicales de tres circunferencias, consideradas dos a dos, se cortarían en un punto, que se llama punto de igual potencia o centro radical. Por ello, para hallar el eje radical de dos circunferencias que no se cortan, podemos usar una circunferencia que las corte a las dos.

Corolario 2. El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan a dos circunferencias dadas, cada una según un diámetro, es una recta perpendicular a la línea de centros y a la misma distancia de uno de los centros que el eje radical lo está del otro.

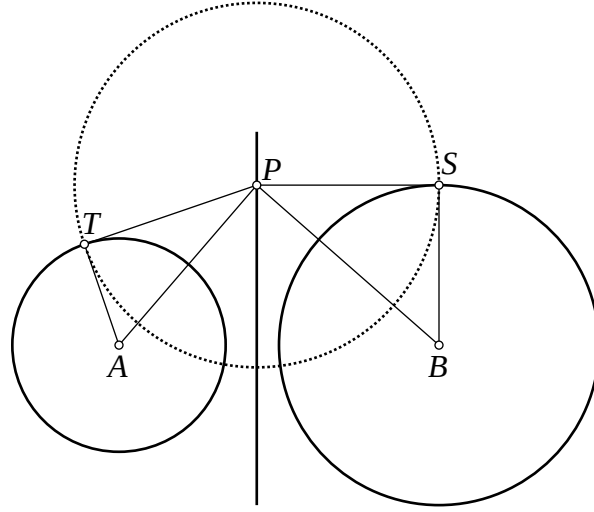


En la figura, A es el centro de una circunferencia de radio $r_1 = AC$ y B es una circunferencia de radio $r_2 = BD$. Si P es un punto que cumple la condición, es decir, es el centro de una circunferencia de radio $r = PC = PD$ que corta a las dos anteriores en dos diámetros, tendremos

$$PA^2 - PB^2 = (PC^2 - AC^2) - (PD^2 - BD^2) = r_2^2 - r_1^2,$$

es decir, el lugar geométrico de P es el eje radical de las circunferencias con centros A y B y radios r_2 y r_1 respectivamente.

Corolario 3. El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan ortogonalmente a dos circunferencias dadas es la recta de igual potencia de las dos circunferencias. (Dos circunferencias se cortan ortogonalmente si las respectivas tangentes en el punto de intersección son perpendiculares).



En efecto, vemos que la situación es idéntica a la del Corolario 1.

i. El lugar geométrico de los puntos tales que los cuadrados de las distancias a dos puntos dados A y B tienen una suma constante a^2 , es una circunferencia que tiene su centro en el punto medio del segmento que une los puntos dados.

Sean A y B los puntos dados y P uno de los puntos buscados. Trazamos la mediana PC , y tenemos, como es sabido que

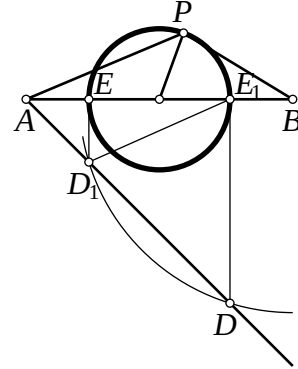
$$AP^2 + BP^2 = 2PC^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$\text{ó } PC^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}AB^2.$$

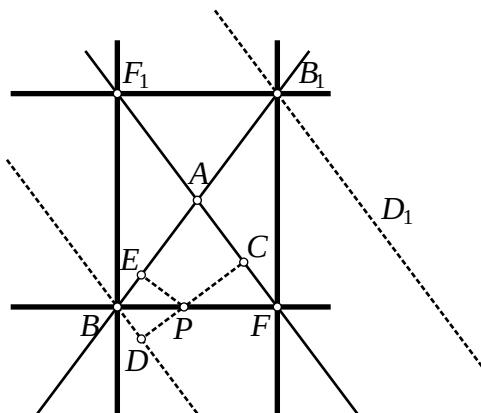
Los puntos buscados están por tanto a una distancia constante de C . Para determinar sobre AB los puntos por los que pasa la circunferencia, hacemos en A , $\angle BAD = 45^\circ$. Trazamos un arco con centro en B y radio a que corta a AD en los puntos D y D_1 . Proyectando ortogonalmente D y D_1 sobre AB obtenemos los puntos buscados E y E_1 , ya que

$$AE^2 + EB^2 = DE^2 + EB^2 = a^2,$$

$$AE_1^2 + E_1B^2 = D_1E_1^2 + E_1B^2 = a^2.$$



Sean AB y AC las rectas dadas, P uno de los puntos buscados tales que $PC + PE = a$. Si ahora hacemos $PD = PE$; el lugar geométrico de D se compondrá de dos rectas, paralelas a AC y a una distancia a de ella. Sean BD y D_1B_1 estas rectas. Los puntos buscados deben estar ahora a igual distancia de AE y de una de esas rectas; estarán entonces sobre una de las cuatro rectas que bisecan los ángulos en los puntos de intersección B y B_1 .



Observación. Si consideramos CP positivo o negativo, según que P esté a un lado u otro de la recta dada AC ; y al mismo tiempo, consideramos EP positivo o negativo, según que P esté a un lado u otro de AB , se tendrá por lugar geométrico una recta ilimitada; ya que se tiene respectivamente para las cuatro rectas:

$$\begin{array}{ll} CP + EP = a; & CP - EP = a; \\ -CP + EP = a; & -CP + EP = a. \end{array}$$

16

Ejemplos

1. Determinar un punto que esté a la misma distancia de tres puntos dados (**c**).
2. Determinar un punto que esté a la misma distancia de tres rectas dadas (**d**).
3. Construir un triángulo conociendo los tres lados (**a**).
4. Construir una circunferencia con un radio dado que pase por dos puntos dados (**a**).
5. Construir una circunferencia con un radio dado que pase por un punto dado y que sea tangente a una recta dada (**a** y **b**).
6. Construir una circunferencia con un radio dado que pase por un punto dado y sea tangente a una circunferencia dada (**a**).
7. Construir una circunferencia con un radio dado que sea tangente a dos rectas dadas (**b**).
8. Construir una circunferencia con un radio dado que sea tangente a una recta dada y a una circunferencia dada (**a** y **b**).
9. Construir una circunferencia con un radio dado que sea tangente dos circunferencias dadas (**a**).
10. Construir un triángulo sabiendo a , h_a y m_a (**a** y **b**).
11. Trazar, a una circunferencia dada, una tangente sobre la que una recta dada determine un segmento dado (**a**, cor. 1).
12. Construir una circunferencia, que pasando por un punto dado, sea tangente a una recta dada o a una circunferencia dada en un punto dado (**c**).
13. Determinar sobre una circunferencia un punto que esté a una distancia dada de una recta dada (**b**).
14. Determinar sobre una recta dada un punto que esté a la misma distancia de dos puntos dados (**c**).
15. Construir una circunferencia tangente a dos rectas paralelas y pasando por un punto dado (**d** y **a**).
16. Desde un punto dado, trazar una tangente a una circunferencia dada (**e**).
17. Construir un triángulo conociendo A , a y h_a (**e** y **b**).
18. Construir un triángulo conociendo A , a y m_a (**e** y **a**).
19. Hallar un punto desde el que se ven dos segmentos dados bajo dos ángulos dados (Problema de Pothot) (**e**).
20. Construir un cuadrilátero inscribible, conociendo un ángulo, un lado contiguo y las dos diagonales (**e** y **a**).

21. Construir un punto tal que las distancias a tres rectas dadas estén entre ellas en razones dadas (**g**).
22. En un triángulo, determinar un punto tal que las distancias a los tres vértices estén entre ellos en unas razones dadas (**f**).
23. Por un punto dado, trazar una recta que corte a una circunferencia dada en dos puntos, de tal manera que las distancias de los puntos de intersección a una recta dada sumen una cantidad dada.
Indicación: Determinar el punto medio de la cuerda (**a**, cor. 1 y **b**).
24. Halla un punto de tal manera que las tangentes trazadas desde él a dos circunferencias dadas tengan longitudes dadas (**a**, cor. 1).
25. Determinar un punto desde el que se vean dos circunferencias dadas bajo dos ángulos dados (**a**, cor. 2).
26. En un triángulo dado, inscribir un triángulo isósceles de altura dada, de manera que su base sea paralela a uno de los lados (**b** y **c**).
27. Trazar una circunferencia cuyo centro esté sobre una recta dada y cuya periferia esté a distancias dadas de dos rectas dadas (**k**).
28. Construir un triángulo conociendo A , w_a y ρ (**d**, **b** y 16).
29. Construir un cuadrilátero inscribible, conociendo AB , BC , AC y el ángulo formado por las diagonales (3 y 1).
30. Construir un punto tal que las tangentes trazadas desde él a tres circunferencias dadas sean de la misma longitud (**h**, cor. 1).
31. Construir un triángulo conociendo A , a y $b^2 + c^2$ (**e** y **i**).
32. En un triángulo dado, encontrar un punto tal que las líneas que lo unen con los vértices, dividen el triángulo en tres triángulos equivalentes.
Indicación: Sea ABC el triángulo, O el punto buscado. Si $\triangle AOB$ y $\triangle AOC$ son equivalentes, el lugar geométrico de O es una recta que pasa por A . Como la mediana divide al triángulo en dos partes equivalentes, el punto medio de BC debe ser un punto del lugar; por tanto, el lugar debe ser esa mediana. El punto buscado es, por tanto, el punto de intersección de las medianas.
33. En un triángulo dado, inscribir un triángulo donde dos de los lados son dados, y de tal manera que uno de sus vértices sea un punto dado (**a**).
34. Construir una circunferencia que sea tangente interiormente a tres circunferencias iguales dadas (1).
35. Construir un triángulo, conociendo a , h_b y h_c (**e** y **a**).
36. Determinar un punto cuya distancia al vértice de un ángulo esté dada y las distancias a los lados del ángulo estén según una razón dada (**a** y **g**).

37. Construir un triángulo, conociendo a , A y $b^2 - c^2$ (**e** y **h**).
38. Construir un triángulo, conociendo a , h_a y $b^2 + c^2$ (**e** e **i**).
39. Construir un triángulo rectángulo, conociendo la altura relativa a la hipotenusa, dos puntos de la hipotenusa y un punto de cada uno de los lados (**b** y **e**).
40. Circunscribir un cuadrado a un triángulo equilátero, de manera que las dos figuras tengan un vértice común.
Indicación: Tratar de encontrar el vértice opuesto del cuadrado (**e** y **c**).
41. Construir un triángulo, conociendo a , A y ρ (**e**, cor. 2).
42. Cortar un segmento dado en dos partes que tengan por media proporcional un segmento dado (**e** y **b**).
43. Dado un triángulo rectángulo, construir una circunferencia tangente a la hipotenusa, que pase por el vértice del ángulo recto y tenga su centro sobre uno de los lados (**c**).
44. Dadas dos rectas paralelas, un punto A en una de ellas y otro punto O en cualquier lugar fuera, trazar por O una recta que corte en X a la paralela pasando por A y en Y a la otra paralela, de manera que $AX = AY$.
Indicación: Tratar de determinar el punto medio de XY .
45. Determinar un punto desde el que se vean bajo el mismo ángulo tres segmentos AB , BC y CD de una misma recta dada (**f**).
46. En un triángulo, determinar un punto desde el que los tres lados parezcan lo mismo de grandes (se vean con el mismo ángulo) (**e**).
47. Determinar un punto desde el que se vean del mismo tamaño tres circunferencias dadas.
Indicación: Las distancias del punto a los centros de las circunferencias deben estar entre ellas en razón de los radios; encontrar entonces el punto por medio de **f**.
48. Construir un triángulo conociendo a , h_a y $b : c$ (**b** y **f**).
49. En un cuadrilátero dado, encontrar un punto tal que las distancias a los de los lados opuestos tengan una suma dada y las distancias a los otros estén en una razón dada.
50. Sobre una circunferencia dada, encontrar un punto tal que la suma de las distancias a dos rectas dadas sea mínima (**k**).
51. Construir una circunferencia que corte perpendicularmente a tres circunferencias dadas (**h**, cor. 3).
52. Construir una circunferencia que corte a tres circunferencias dadas según los diámetros (**h**, cor. 2).

53. Inscribir un triángulo rectángulo en una circunferencia dada de manera que cada uno de los lados pase por un punto dado (**e**).
54. En una circunferencia dada, inscribir un triángulo rectángulo, conociendo un ángulo agudo y un punto de uno de los lados (**e**).
55. Dadas dos bolas sobre el mismo diámetro de un billar circular, determinar cómo debemos lanzar una de ellas para que, después de rebotar, se encuentre con la otra (**f**).

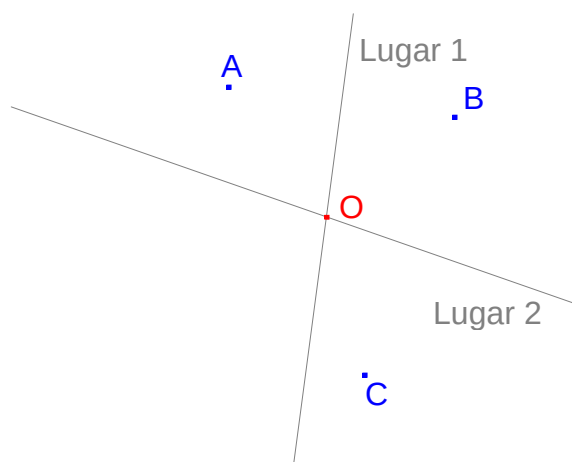
Parte II

Soluciones

1. Determinar un punto que esté a la misma distancia de tres puntos dados.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean A , B y C los puntos dados.

1. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B es la mediatriz del segmento AB .
2. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de B y C es la mediatriz del segmento BC .

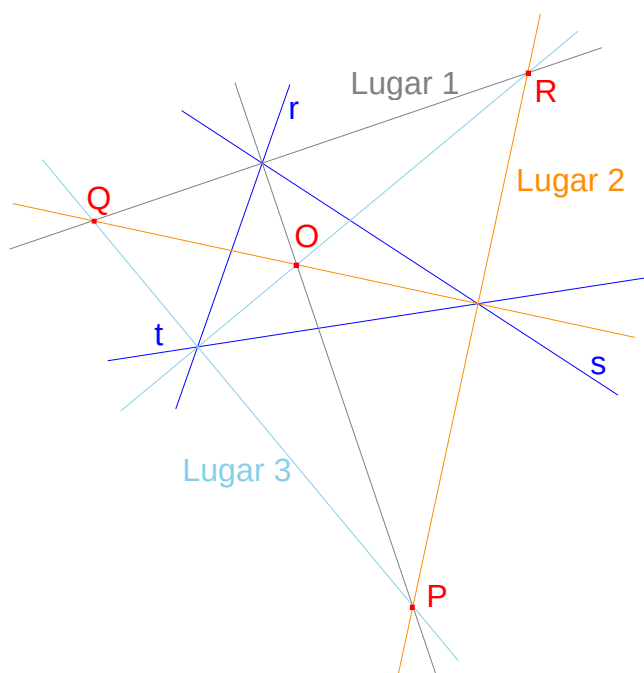
El punto de intersección de ambas rectas nos da el punto buscado O .

DISCUSIÓN: El punto O no existirá cuando los tres puntos dados estén alineados, ya que las mediatrices serán rectas paralelas.

2. Determinar un punto que esté a la misma distancia de tres rectas dadas.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean r , s y t las tres rectas dadas. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta r y la recta s está formado por las bisectrices de los ángulos formados por dichas rectas.

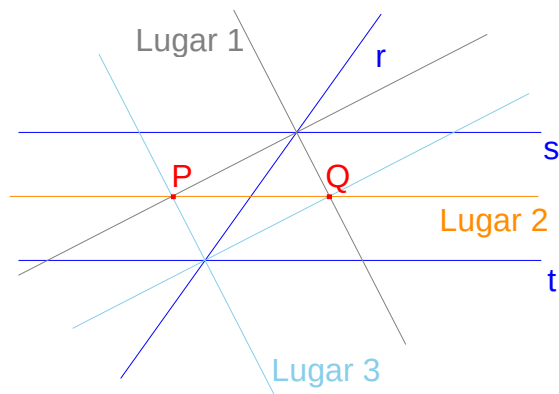
Trazamos las bisectrices de los ángulos formados por las rectas, dos a dos. Los puntos de intersección de bisectrices de los tres pares de ángulos serán las soluciones del problema.

DISCUSIÓN: Sabemos que el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos rectas está formado por dos rectas perpendiculares entre sí que bisecan los ángulos comprendidos entre las dos rectas.

En el caso más general de que las tres rectas dadas formen triángulo, al trazar las bisectrices interiores e exteriores de los ángulos formados por

dichas rectas, obtendremos cuatro puntos comunes a bisectrices de los tres ángulos, que son las cuatro soluciones del problema propuesto.

Cuando dos de las rectas sean paralelas y la otra sea secante a ellas, existen dos soluciones, y si las rectas son tres paralelas, no hay ninguna solución.

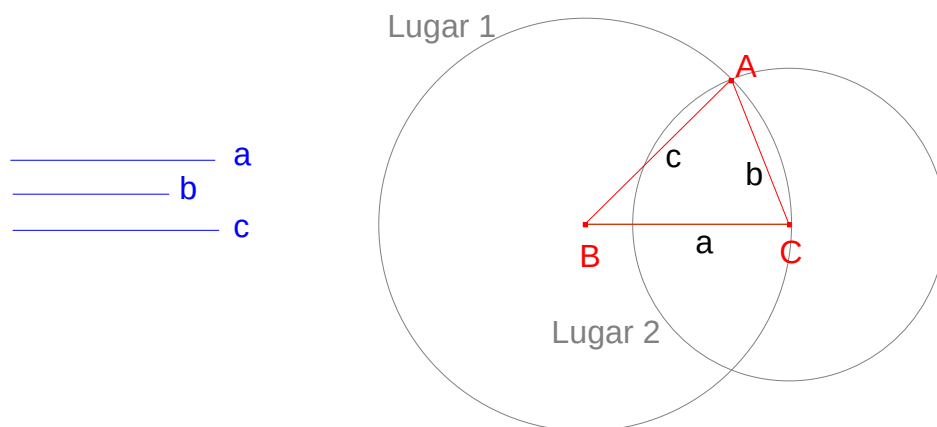


Por último, en el caso de que las tres rectas se corten en un punto, dicho punto es la única solución del problema.

3. Construir un triángulo conociendo los tres lados.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean a , b y c los tres lados del triángulo ABC buscado. En primer lugar, construimos un segmento BC de longitud a . El vértice A estará en la circunferencia de centro B y radio c (Lugar 1) y en la circunferencia de centro C y radio b (Lugar 2). La intersección de las dos circunferencias darán la solución del problema.

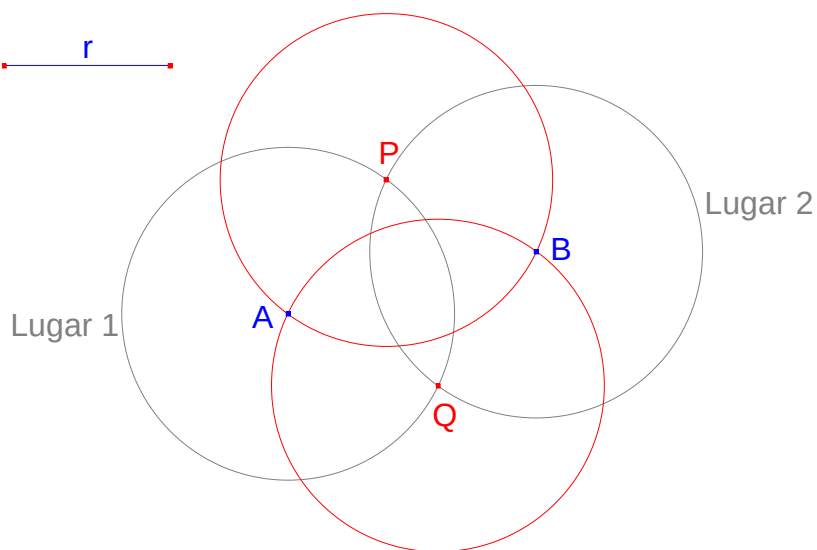
EXACTITUD: Por construcción es $BC = a$, y si el punto A está en la circunferencia de centro B y radio c y en la circunferencia de centro C y radio b , tendremos $CA = b$ y $AB = c$.

ANÁLISIS: Para que el problema tenga solución es necesario que cada lado sea estrictamente menor que la suma de los otros dos.

4. Construir una circunferencia con un radio dado que pase por dos puntos dados.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean r el radio dado y A y B los puntos dados. El centro de la circunferencia buscada tiene que distar r tanto de A como de B así que estará en las circunferencias con centros A y B y radio r . Entonces, para hallar el centro de la circunferencia buscada, bastará trazar las circunferencias con centros A y B y radio r .

EXACTITUD: Como los puntos P y Q están en las circunferencias con centros A y B , y radio r , tendremos $PA = PB = QA = QB = r$, estando recíprocamente A y B en las circunferencias de centros P y Q , y radio r .

ANÁLISIS: Si $AB < 2r$, las dos circunferencias se cortarán como muestra la figura en dos puntos P y Q , soluciones del problema propuesto.

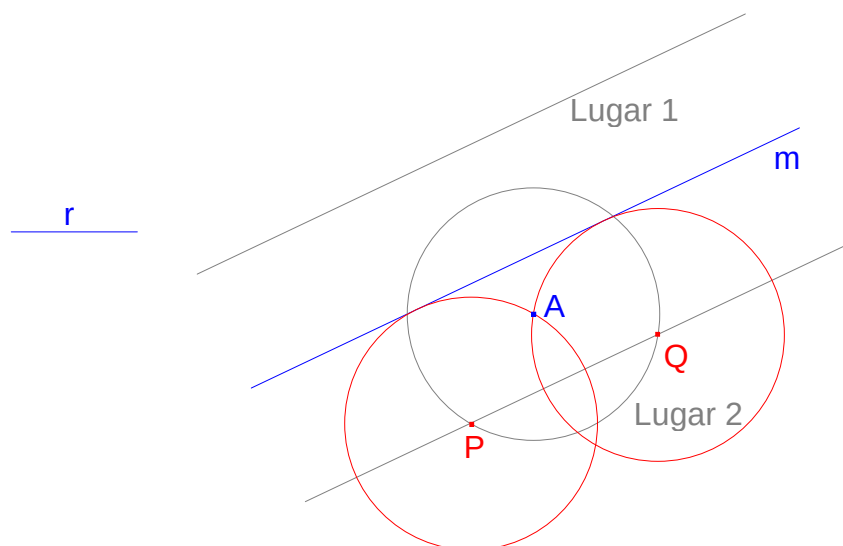
Si $AB = 2r$, las circunferencias de centros A y B son tangentes en un punto, única solución del problema en este caso.

Por último, si $AB > 2r$ el problema no tiene solución.

5. Construir una circunferencia con un radio dado que pase por un punto dado y que sea tangente a una recta dada.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



Construcción: Sean r , A y m , respectivamente, el radio, el punto y la recta tangente dadas. El centro de la circunferencia buscada debe estar en una de las dos rectas paralelas que distan r de la recta m . También debe estar en una circunferencia de centro y radio r .

EXACTITUD: Si P y Q son, como se muestra en la figura, los puntos de intersección, estos puntos están a distancia r de la recta m , por estar en las mencionadas rectas paralelas, y también están a distancia r del punto A por estar en la circunferencia con centro A . Por tanto, las circunferencia con centro cualquiera de los puntos P y Q y radio r será tangente a m y pasará por A .

ANÁLISIS: Si el punto A está en la recta m , hay dos soluciones del problema, dos circunferencias simétricas una de la otra respecto de m , con centro en las paralelas y punto de tangencia en A con la recta m .

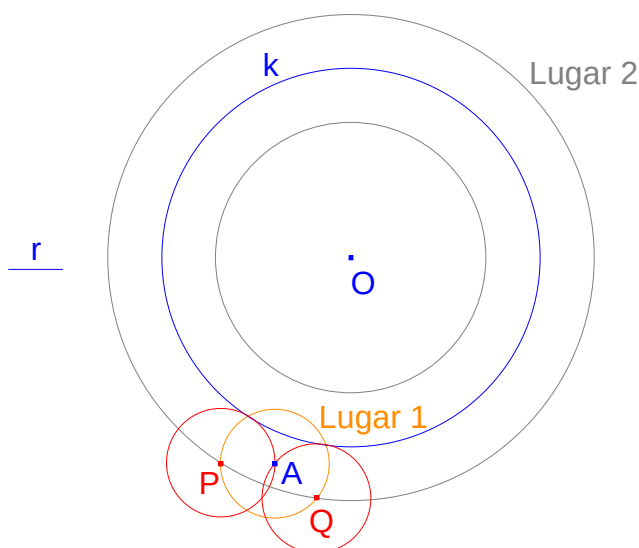
Si la distancia d del punto A a la recta m es tal que $0 < d < 2r$, habrá dos circunferencias solución como las que muestra la figura.

Finalmente, si $d = 2r$, sólo hay una solución, y si $d > 2r$, no hay ninguna.

6. Construir una circunferencia con un radio dado que pase por un punto dado y sea tangente a una circunferencia dada.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



Sean r , A y k el radio, el punto y la circunferencia tangente dados. Supongamos que k tiene centro O y radio R .

CONSTRUCCIÓN: El centro de la circunferencia buscada deberá estar en los siguientes lugares geométricos:

1. La circunferencia con centro A y radio r .
2. Las circunferencias concéntricas a k con radios $R + r$ y $R - r$.

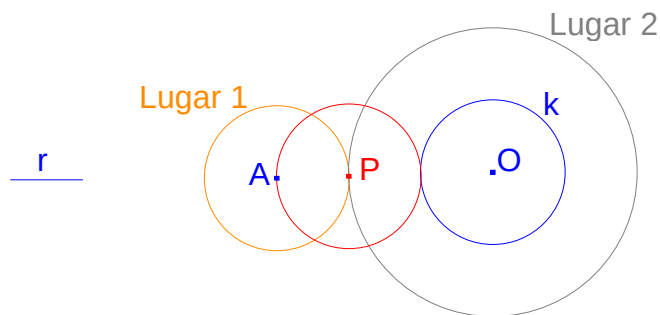
Por tanto, el centro de la circunferencia buscada se obtendrá como intersección de estos lugares geométricos.

EXACTITUD: Por estar los puntos de intersección en las circunferencias concéntricas, las circunferencias con centro dichos puntos y radio r serán tangentes a la circunferencia dada. Por estar los puntos de intersección en la

circunferencia con centro el punto dado y radio r , las circunferencias con centro dichos puntos y radio r pasarán por el punto dado.

ANÁLISIS: Si la circunferencia solución corta a las circunferencias concéntricas, lo hará tangencialmente en un punto a cada una de ellas, por lo que obtendremos un número máximo de dos soluciones.

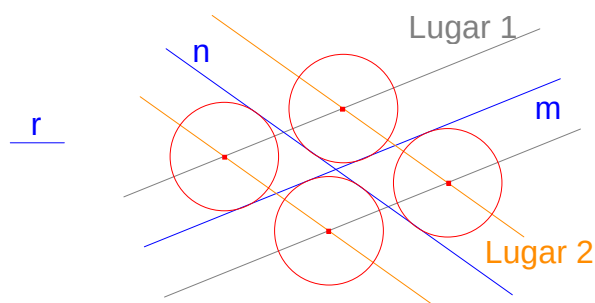
La figura muestra el caso concreto de que el punto $R = r$ y A está a distancia $3r$ del centro de la circunferencia k . Vemos que una de las circunferencias circunscritas se reduce a un punto y que la otra es tangente a la circunferencia con centro A , resultando una única solución.



7. Construir una circunferencia con un radio dado que sea tangente a dos rectas dadas.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Para que la circunferencia sea tangente a una de las rectas, su centro debe estar en una de las dos rectas paralelas a ella que hay a distancia r . Los puntos de intersección de las paralelas correspondientes a las dos rectas serán los centros de las circunferencias buscadas.

EXACTITUD: Los puntos de intersección, por estar en las paralelas a distancia r de ambas rectas serán tangentes a ellas.

ANÁLISIS: Cuando las rectas dadas son secantes, como en la figura, hay cuatro soluciones.

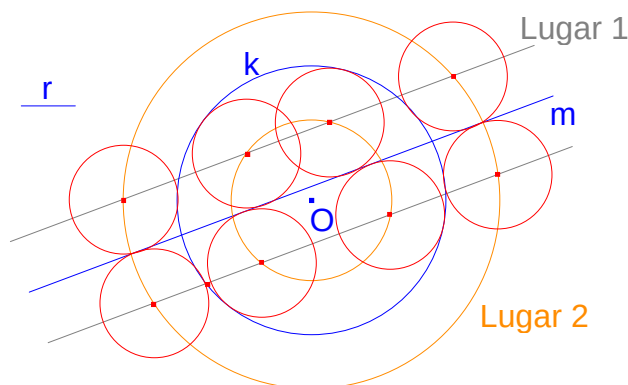
Si las rectas dadas son paralelas, pueden darse dos casos:

1. Si la distancia entre ellas es exactamente $2r$, hay infinitas soluciones: el centro de la circunferencia buscada puede ser cualquier punto que esté en la recta paralela a ambas que está a una distancia r de ambas.
2. Si la distancia entre las rectas no es $2r$, el problema no tiene solución.

8. Construir una circunferencia con un radio dado que sea tangente a una recta dada y a una circunferencia dada.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean r , m y k el radio, la circunferencia tangente y la circunferencia dados. Sea R el radio de la circunferencia k . Los centros de las circunferencias solución deberán estar en dos lugares geométricos:

1. Las rectas paralelas a m que están a distancia r de ella.
2. Las circunferencias concéntricas a k con radios $R + r$ y $R - r$.

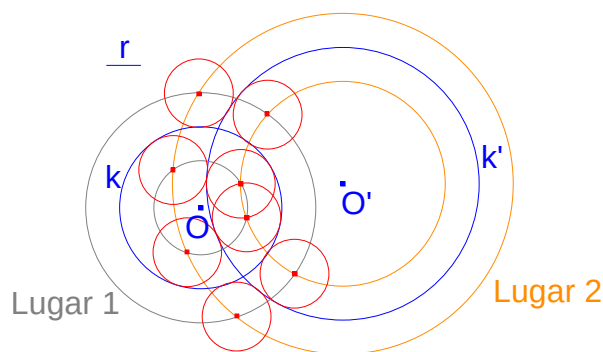
EXACTITUD: Por estar los puntos de intersección en las circunferencias concéntricas, las circunferencias con centro dichos puntos y radio r serán tangentes a la circunferencia dada. Por estar los puntos de intersección en las rectas paralelas, las circunferencias con centro dichos puntos y radio r serán tangentes a la recta dada.

ANÁLISIS: La figura de arriba muestra el caso en el que se produce el número máximo de ocho soluciones. Varias de estas soluciones pueden confundirse en una sola o no existir, por lo que el número de soluciones del problema variará entre 0 y 8.

9. Construir una circunferencia con un radio dado que sea tangente dos circunferencias dadas.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean r el radio dado y k, k' las circunferencias, de radios R, R' . Los centros de las circunferencias de radio r que son tangentes a k deben estar en las circunferencias concéntricas a k con radios $R + r$ y $R - r$. Análogamente para la circunferencia k' . Los centros de las circunferencias buscadas serán los puntos comunes a dos circunferencias concéntricas respectivamente a k y k' .

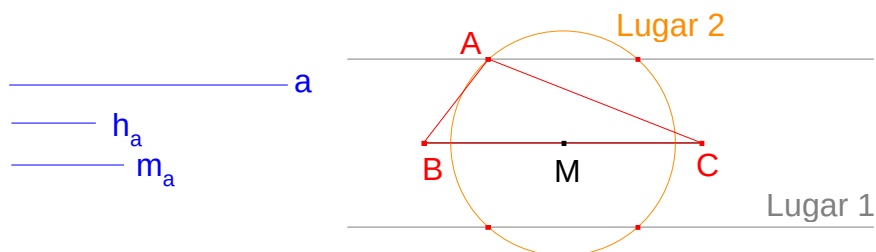
EXACTITUD: Por estar los centros de las circunferencias en las circunferencias concéntricas a las dadas, serán tangentes a dichas circunferencias.

ANÁLISIS: Como en el problema anterior, puede que algunas de las soluciones se coincidan con otras o no existan, pudiendo tener entonces el problema desde ninguna hasta ocho soluciones.

10. Construir un triángulo sabiendo a , h_a y m_a .

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Comenzamos obtener un segmento BC de longitud a . El vértice A estará en dos lugares geométricos:

1. Las rectas paralelas al segmento BC que están a distancia h_a de él.
2. La circunferencia que tiene por centro el punto medio M del segmento BC y radio m_a .

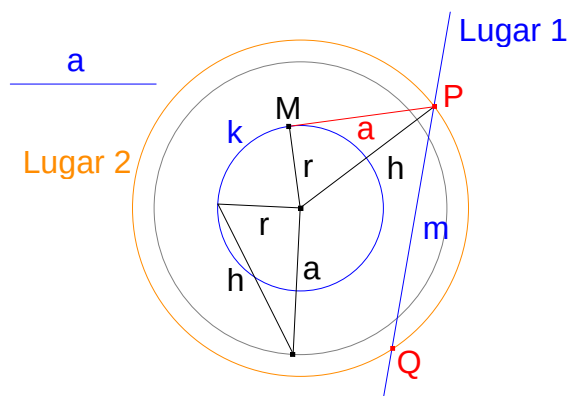
EXACTITUD: Por estar el punto A en una paralela a BC que dista h_a de ella, la distancia de A a BC es h_a . Por estar el punto A en la circunferencia de centro M y radio m_a , la distancia AM es m_a .

ANÁLISIS: Para cada segmento $BC = a$ habrá cuatro soluciones, dos o ninguna, dependiendo de que $h_a < m_a$, $h_a = m_a$ o $h_a > m_a$, respectivamente.

11. Trazar, a una circunferencia dada, una tangente sobre la que una recta dada determine un segmento dado.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean k , m y a la circunferencia, la recta y el segmento dados. Sean O y r centro y el radio de la circunferencia k . Los puntos P para los que el segmento de tangente desde P hasta la circunferencia miden a deben estar en una circunferencia de radio $h = \sqrt{a^2 + r^2}$, ya que el triángulo OMP será rectángulo. Entonces, trazamos un triángulo rectángulo de catetos a y r . Con centro O y radio la hipotenusa h de este triángulo trazamos una circunferencia, que cortará a la recta dada en los puntos desde los que debemos trazar la recta tangente a la circunferencia.

EXACTITUD: Al trazar desde los puntos hallados tangentes a la circunferencia dada y unir el punto de tangencia con el centro O , se formará un triángulo rectángulo idéntico al usado en la construcción.

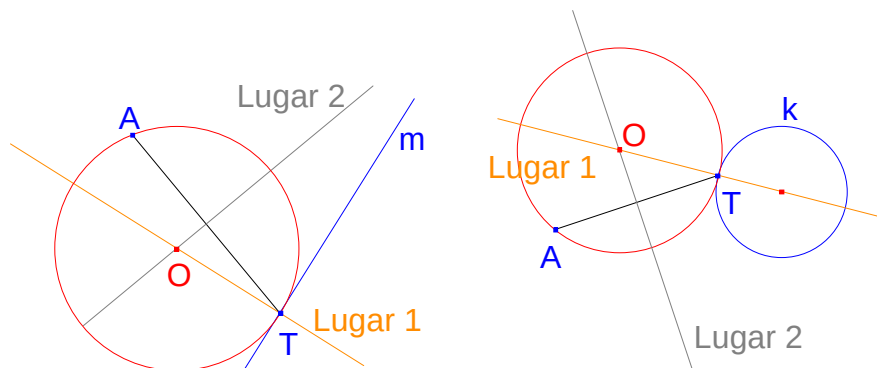
ANÁLISIS: La circunferencia con centro O y radio h cortará a la recta dada m en dos puntos, uno o ninguno. Entonces, podremos trazar la recta tangente de cuatro formas, dos o ninguna.

12. Construir una circunferencia, que pasando por un punto dado, sea tangente a una recta dada o a una circunferencia dada en un punto dado.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: En el primer caso, queremos trazar una circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la recta m en el punto T . El centro O de la circunferencia buscada estará, por un lado en la perpendicular a m por T , y por otro en la mediatriz del segmento AT .



En el segundo caso, queremos trazar una circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la circunferencia k en el punto T . Para ello, trazamos la recta que une el centro de k con T y la mediatriz del segmento AT . Ambas rectas se cortarán en el centro O de la circunferencia buscada.

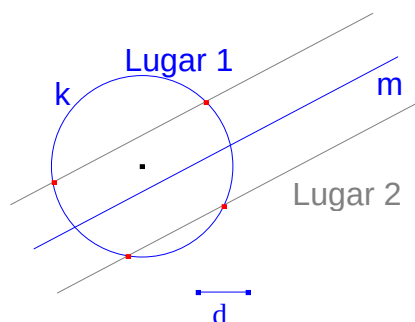
EXACTITUD: En ambos casos, por estar O en la mediatriz del segmento AT , O equidista de A y T . En el primero, m es la tangente en T por ser OT perpendicular a m . En el segundo caso, las dos circunferencias son tangentes, por estar alineado el punto T con los centros de las dos circunferencias.

ANÁLISIS: En el primer caso, si el punto A pertenece a la recta m , la mediatriz de AT y la perpendicular a m por T serán rectas paralelas, no existiendo su punto de intersección O y entonces el problema carece de solución. Análogamente, en el segundo caso, tampoco hay solución el punto A está en la tangente a k por el punto T .

13. Determinar sobre una circunferencia un punto que esté a una distancia dada de una recta dada.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean k , d y m la circunferencia, la distancia y la recta dadas. Trazamos dos paralelas a m que distan d de ella. Los puntos de intersección de estas paralelas con la circunferencia son las soluciones del problema.

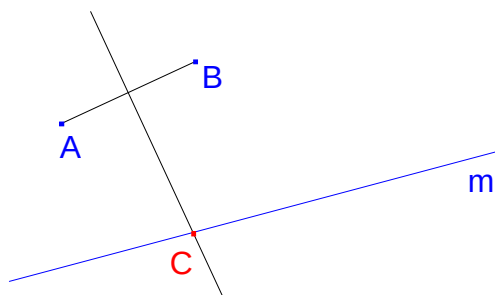
EXACTITUD: Por estar en las rectas paralelas, los puntos hallados, que pertenecen a la circunferencia, están a una distancia d de m .

ANÁLISIS: La intersección de cada recta paralela con la circunferencia dada puede estar formada por dos puntos, uno o ninguno. En total puede haber, como máximo cuatro soluciones. También puede haber cero, una dos o tres soluciones.

14. Determinar sobre una recta dada un punto que esté a la misma distancia de dos puntos dados.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean A y B los puntos dados y sea m la recta dada. El punto buscado deberá estar en la mediatriz del segmento AB y en la recta dada.

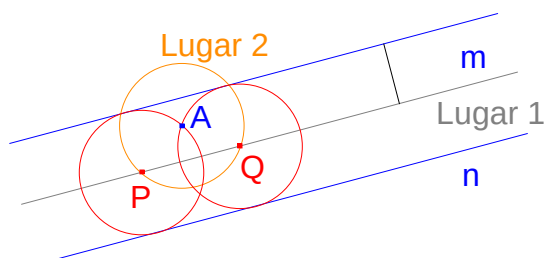
EXACTITUD: Por estar en la mediatriz, el punto hallado está a la misma distancia de los dos puntos dados.

ANÁLISIS: El problema tendrá infinitas soluciones si los dos puntos dados A y B son simétricos respecto de la recta dada. En ese caso, la mediatriz de AB es la recta dada y cualquier punto de la misma es solución del problema. Si los puntos están en una perpendicular a la recta dada y no estamos en el caso anterior, la mediatriz correspondiente y la recta dada serán rectas paralelas, y el problema no tendrá solución. En los demás casos, la solución será única.

15. Construir una circunferencia tangente a dos rectas paralelas y pasando por un punto dado.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean m , n y A las dos rectas paralelas y el punto dados. El centro de la circunferencia buscada deberá estar en una recta paralela a m y n a la misma distancia (llamémosle d) de ambas. También deberá estar en la circunferencia con centro A y radio d .

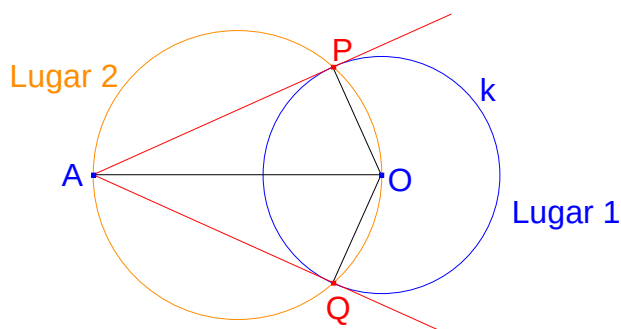
EXACTITUD: Los puntos hallados P y Q están en la circunferencia de centro A y radio d , por lo que A estará en las circunferencias de centros P y Q y radio d . Las circunferencias serán tangentes a las rectas paralelas dadas, pues en ambos casos la distancia del centro a la recta es d .

ANÁLISIS: El problema no tendrá solución si el punto dado está por el mismo lado de las dos rectas. Tendrá una solución si está sobre una de las dos rectas y dos soluciones si está en la región comprendida entre las dos rectas.

16. Desde un punto dado, trazar una tangente a una circunferencia dada.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Sean A el punto dado, y k la circunferencia dada con centro O . Si P es el punto de tangencia de una tangente a la circunferencia k trazada desde A , el ángulo OPA es recto, por lo que P estará en una circunferencia de diámetro OA .

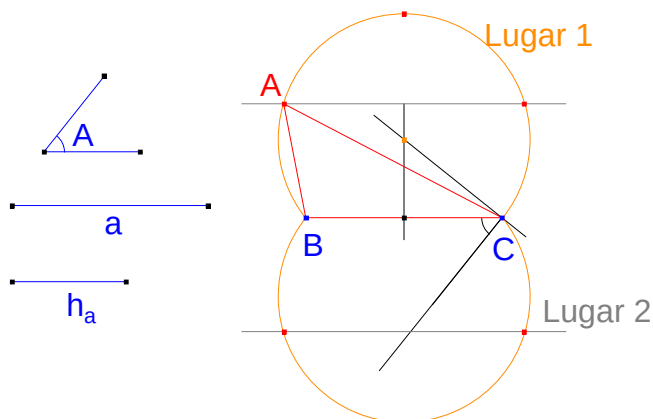
EXACTITUD: Desde todos los puntos de esta circunferencia de diámetro OA , éste se ve OA bajo un ángulo recto. Los segmentos AP y AQ serán perpendiculares a los radios OP y OQ , respectivamente.

ANÁLISIS: El problema tiene dos soluciones siempre el punto A sea exterior a la circunferencia. En el caso límite de que el punto A esté sobre la circunferencia, las dos soluciones se confunden en una sola. Si el punto A es interior a la circunferencia, el problema no tiene solución.

17. Construir un triángulo conociendo A , a y h_a .

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Situamos en un lugar cualquiera un segmento BC de longitud a . El vértice A estará en dos lugares geométricos:

1. El arco capaz del segmento BC para el ángulo A .
2. Las rectas paralelas a BC a distancia h_a .

EXACTITUD: Los puntos de intersección de los dos lugares geométricos servirán como vértices A del triángulo buscado.

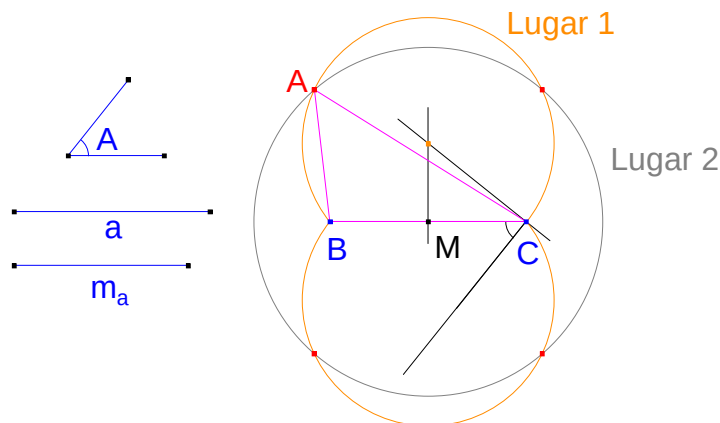
ANÁLISIS: . Teniendo en cuenta los dos arcos capaces y las dos rectas paralelas al lado BC podremos construir hasta cuatro puntos solución del problema para cada lado BC , aunque los triángulos resultantes serán todos iguales. Puede ser que los arcos capaces y las rectas paralelas no tengan intersección o que ésta se reduzca a un punto por cada lado cuando sean tangentes. Es fácil ver que esto último ocurrirá cuando

$$h_a = \frac{1 + \cos A}{2 \sin A} a.$$

18. Construir un triángulo conociendo A , a y m_a .

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Situamos en un lugar cualquiera un segmento BC de longitud a . El vértice A estará en dos lugares geométricos:

1. Los arcos capaces del del segmento BC para el ángulo A .
2. La circunferencia con centro el punto medio M del segmento BC y radio m_a .

EXACTITUD: Los puntos de intersección de los dos lugares geométricos servirán como vértices A del triángulo buscado.

ANÁLISIS: . La intersección de los dos arcos capaces y con la circunferencia con centro M y radio m_a puede ser de hasta cuatro puntos, aunque como el problema precedente, los triángulos resultantes serán todos iguales. Los cuatro puntos pueden reducirse a dos en el caso de que la circunferencia con centro M y radio m_a sea tangente a los arcos capaces. También puede darse el caso de que no haya puntos comunes y por tanto el problema no tenga solución. El caso en que haya exactamente dos soluciones ocurrirá cuando

$$m_a = \frac{1 + \cos A}{2 \sin A} a.$$

19. Hallar un punto desde el que se ven dos segmentos dados bajo dos ángulos dados (Problema de Pothénor).

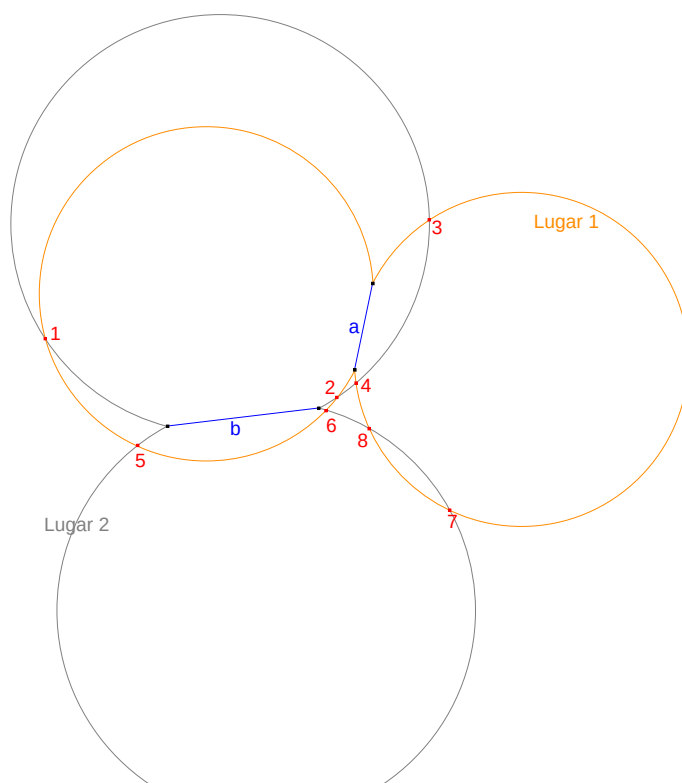
Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Bastará construir los arcos capaces de los segmentos con los ángulos correspondientes. Cualquier punto de intersección de dichos arcos será una solución.

EXACTITUD: Desde los puntos pertenecientes a cada arco capaz se ve uno de los segmentos bajo el ángulo correspondiente. Los puntos comunes a los dos arcos capaces cumplirán lo mismo para los dos segmentos.

ANÁLISIS: Cada uno de los dos arcos capaces correspondientes a un segmento cortará a cada uno de los arcos capaces del otro segmento. Habrá, como máximo ocho soluciones, caso que muestra la figura:

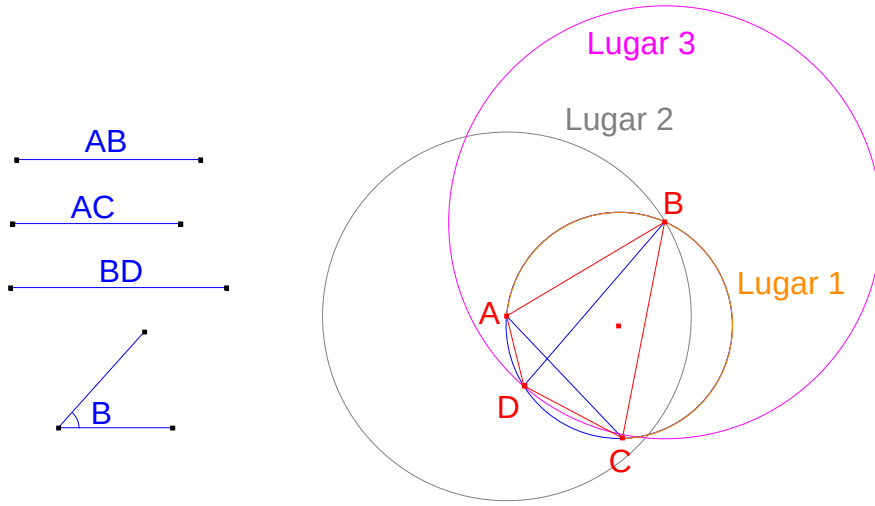


20. Construir un cuadrilátero inscribible, conociendo un ángulo, un lado contiguo y las dos diagonales.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que B y AB son el ángulo y el lado contiguo conocidos, y que las diagonales son AC y BD .



CONSTRUCCIÓN: Sobre un segmento AC construiremos el arco capaz del ángulo B (Lugar 1). Para simplificar sólo trazamos uno de los dos arcos capaces. Trazamos la circunferencia de centro A y radio AB (Lugar 2). La intersección de estos dos lugares nos da el punto B . Ahora trazamos la circunferencia con centro B y radio BD . La intersección de esta circunferencia con la circunferencia circunscrita a ABC nos da el cuarto punto D .

ANÁLISIS: Una vez fijado el segmento AC y descrito el arco capaz del ángulo B , para que la circunferencia con centro A y radio AB tenga intersección con este arco capaz es necesario que

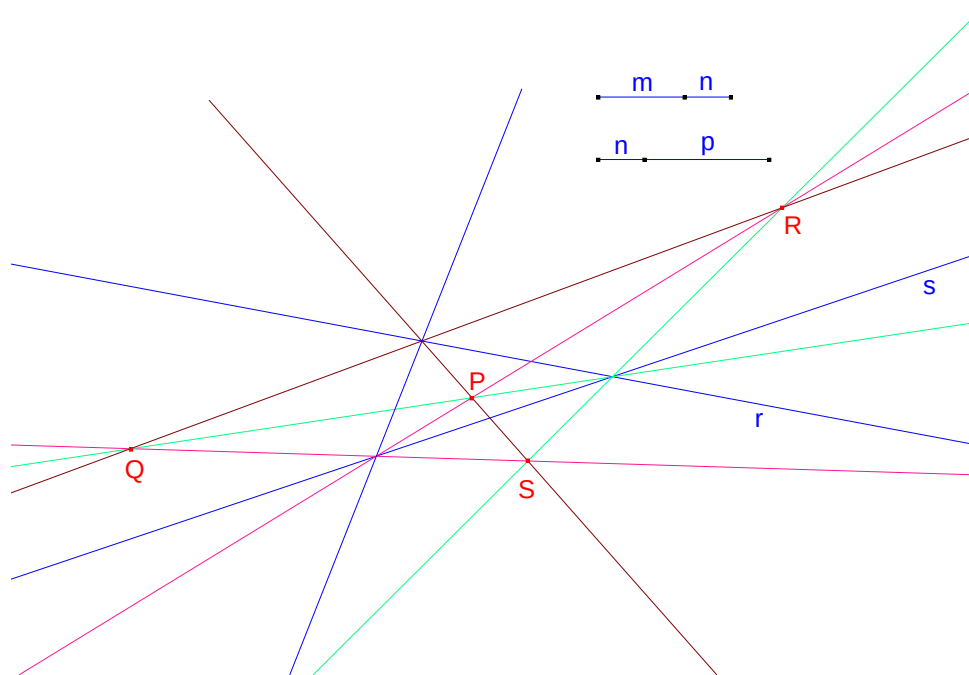
$$AB \leq \frac{AC \cdot (1 + \cos B)}{2 \sin B}.$$

Ahora, para que el problema tenga solución, BD debe variar en un intervalo de manera que la circunferencia con centro B y radio BD corten a la circunferencia ABC por el lado contrario de donde se encuentra B .

21. Construir un punto tal que las distancias a tres rectas dadas estén entre ellas en razones dadas.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Partimos de las rectas r , s y t . El lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a las rectas r y s están en la proporción $a : b$ está formado por dos rectas (en color verde claro en la figura), rectas que pasan por el punto de intersección de r y s . De igual forma obtenemos lugares geométricos correspondientes para las rectas s, t y r, t . Los puntos de intersección de los tres lugares dan la solución del problema.

ANÁLISIS: Cuando las tres rectas dadas se cortan dos a dos, o cuando dos de las rectas son paralelas y la otra es secante a ellas, la solución estará formada por cuatro puntos, como los puntos P , Q , R y S de la figura.

Analicemos con detalle el caso de que las tres rectas sean paralelas. Sean r , s y t tres rectas paralelas, siendo a y b las distancias de la primera a la

segunda y de la segunda a la tercera, respectivamente. Queremos hallar los puntos tales que las distancias a las tres rectas están en la razón $m : n : q$. Si suponemos las rectas con ecuaciones $y = 0$, $y = a$ e $y = a + b$, la condición se expresa con las ecuaciones

$$\left| \frac{y}{y-a} \right| = \frac{m}{n}, \quad \left| \frac{y-a}{y-(a+b)} \right| = \frac{n}{q}.$$

cuyas soluciones son, respectivamente:

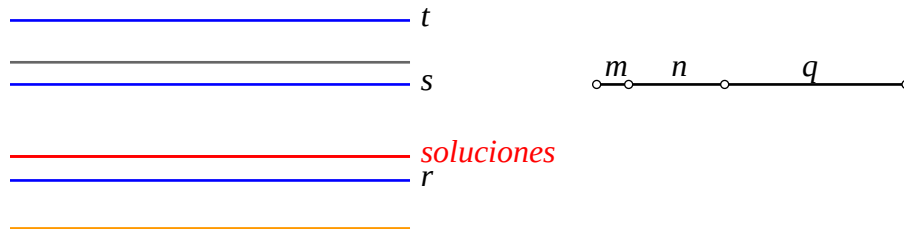
$$y_{1,2} = \frac{am}{m \pm n}, \quad y_{3,4} = \frac{(a+b)n \pm aq}{n \pm q}.$$

En general, esto da lugar a cuatro rectas paralelas distintas, no habiendo solución para el problema. Pero puede ocurrir que una de las rectas del primer par coincida con una de las rectas del segundo par y entonces el problema tendrá infinitas soluciones. Puede comprobarse que esto ocurre cuando

$$q = \frac{mb + n(a+b)}{a}, \text{ o bien } q = \frac{|mb - n(a+b)|}{a},$$

o, de una forma más compacta, cuando $mb \pm n(a+b) \pm aq = 0$.

La figura siguiente muestra el caso en que $a : b = 3 : 2$. Por ejemplo, para $m : n = 1 : 3$, usando la primera de estas fórmulas obtenemos $q = \frac{17}{3}$, resultando que el problema de hallar los puntos cuyas distancias a las rectas r , s y t están en las razones $1 : 3 : \frac{17}{3}$, o $3 : 9 : 17$, tiene infinitas soluciones.



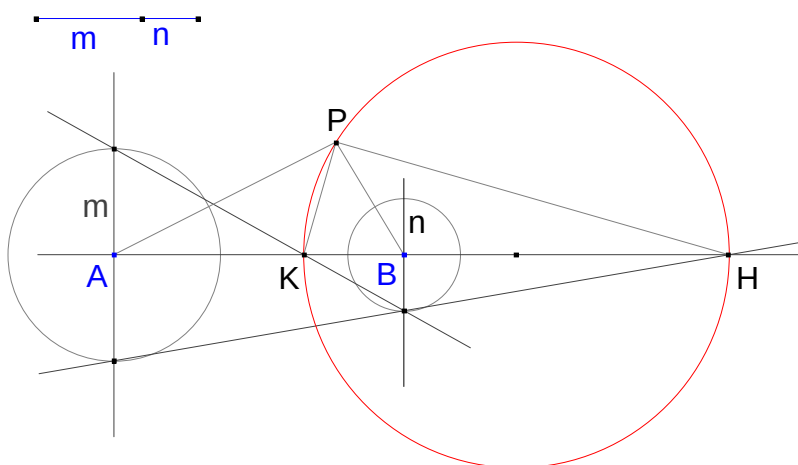
22. En un triángulo, determinar un punto tal que las distancias a los tres vértices estén entre ellos en unas razones dadas.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: El lugar geométrico de los puntos P cuyas distancias a los puntos A y B están en la razón $m : n$ es una circunferencia con diámetro KH , siendo K y H los centros de homotecia de dos circunferencias, una centrada en A con radio m y otra centrada en B con radio n . A esta circunferencia la llamaremos *circunferencia de Apolonio* para $A, B, m : n$.

La figura siguiente muestra cómo construir la circunferencia de Apolonio:



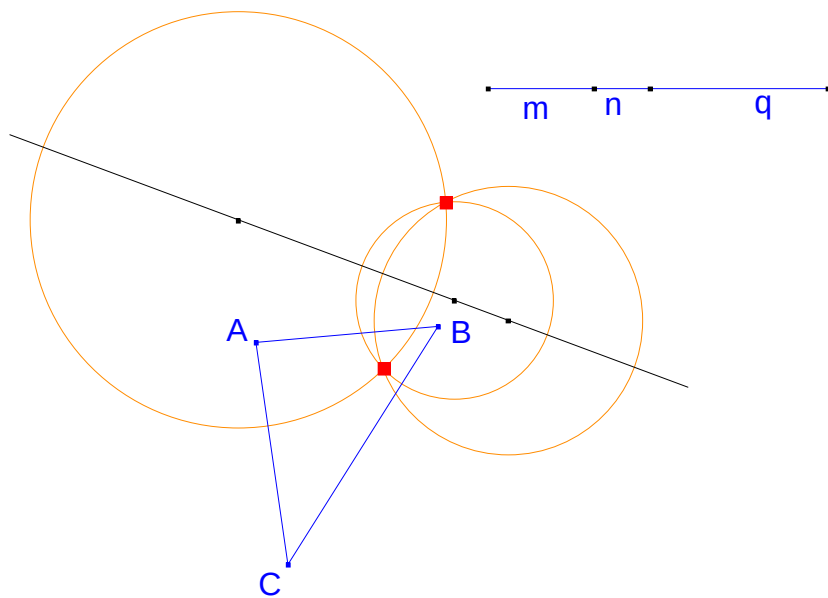
En efecto, siendo P un punto que cumple la propiedad tendremos

$$\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n} = \frac{AK}{BK} = \frac{AH}{BH},$$

que implica que K y H son los puntos de corte con la recta AB de las bisectrices interior y exterior del ángulo APB , por lo que tendremos el ángulo APB es recto, es decir P está en la circunferencia de diámetro KH .

Si queremos hallar un punto P tal que distancias a los puntos A , B y C estén en las razones $m : n : q$, el problema se reduce a trazar las

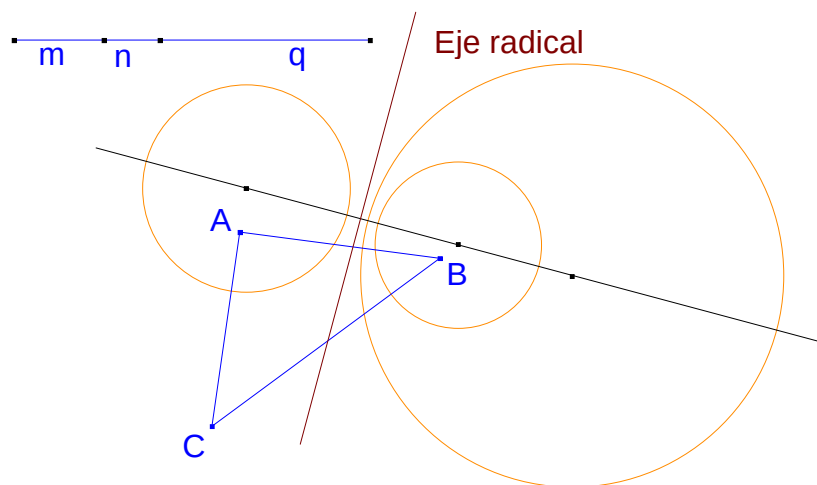
circunferencias de Apolonio para $A, B, m : n$, $B, C, n : q$ y $A, C, m : q$. Los puntos de intersección de las tres circunferencias nos darán la solución del problema.



Teniendo en cuenta que, por ejemplo,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}, \frac{PB}{PC} = \frac{n}{q} \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{m}{q},$$

deducimos que si un punto pertenece a dos de las tres circunferencias también pertenece a la tercera. Por tanto, podrá haber dos, una o ninguna solución.



Esta figura muestra el caso en el que no hay ninguna solución. Observamos también que, como ocurre en general, los centros de las tres circunferencias están alineados y, además, las circunferencias son coaxiales, es decir, tienen el mismo eje radical.

Nos proponemos ahora, con ayuda del programa de cálculo simbólico *Mathematica*, encontrar alguna condición simple sobre los lados a, b, c de un triángulo y los números positivos m, n, q tales el problema tenga dos soluciones, una o ninguna. Lo primero que hacemos es escribir la ecuación la circunferencia de Apolonio para los puntos A y B y la razón $m : n$.

```
ecuapolo[a_, b_, m_, n_] :=  
Expand[n2 (x - a[[1]])2 + n2 (y - a[[2]])2 - m2 (x - b[[1]])2 - m2 (y - b[[2]])2];
```

El siguiente paso es asignar coordenadas a los puntos A, B y C , y pedir a *Mathematica* que calcule los puntos de intersección de las tres circunferencias de Apolonio:

```
a = {0, 0}; b = {w, 0}; c = {u, v};  
Simplify[Solve[{  
  ecuapolo[a, b, m, n] == 0,  
  ecuapolo[b, c, n, q] == 0,  
  ecuapolo[a, c, m, q] == 0}, {x, y}]]
```

El resultado es absolutamente descomunal y no lo reproducimos aquí, pero sabemos que se trata de las soluciones de una ecuación de segundo grado, así que por ahora nos fijaremos en el discriminante y trataremos de encontrar las condiciones en las que se anulará. Dicho discriminante es de la forma $(m^2 - n^2)^2 v^2 \Delta$, siendo

$$\Delta = -m^4 (u^2 + v^2 - 2uw + w^2)^2 - (n^2 (u^2 + v^2) - q^2 w^2)^2 + 2m^2 (u^2 + v^2 - 2uw + w^2) (n^2 (u^2 + v^2) + q^2 w^2);$$

Comoquiera que al intentar factorizar esta expresión no obtenemos ningún resultado, probamos a expresarlo en términos de los lados a, b y c del triángulo, en lugar de las coordenadas u, v, w .

Clear[**a, b, c**]

Eliminate[**{ $\Delta = 0, u^2 + v^2 == b^2, (w - u)^2 + v^2 == a^2, c == w$ }**, **{u, v, w}**]

$$c^2 (-2a^2 m^2 - 2b^2 n^2) q^2 + c^4 q^4 = -a^4 m^4 + 2a^2 b^2 m^2 n^2 - b^4 n^4$$

Ahora probamos a factorizar esta expresión, llegando a un resultado aceptable:

Factor[**$c^2 (-2a^2 m^2 - 2b^2 n^2) q^2 + c^4 q^4 - (-a^4 m^4 + 2a^2 b^2 m^2 n^2 - b^4 n^4)$**]

$$(am - bn - cq)(am + bn - cq)(am - bn + cq)(am + bn + cq)$$

Resumiendo, hemos descubierto que el discriminante de la ecuación de segundo grado que da las soluciones del problema es

$$(m^2 - n^2)^2 v^2 (bn + cq - am)(am + cq - bn)(am + bn - cq)(am + bn + cq).$$

En el caso de que $m \neq n$, podemos considerar los siguientes casos:

1. Si los segmentos de longitudes am, bn y cq forman triángulo, el discriminante será positivo y el problema tendrá dos soluciones.
2. Si alguna de las cantidades am, bn y cq es mayor que la suma de las otras dos, el discriminante es negativo y el problema no tiene ninguna solución.
3. Finalmente, si alguna de las tres cantidades es igual a la suma de las otras dos, el problema tendrá solución única.

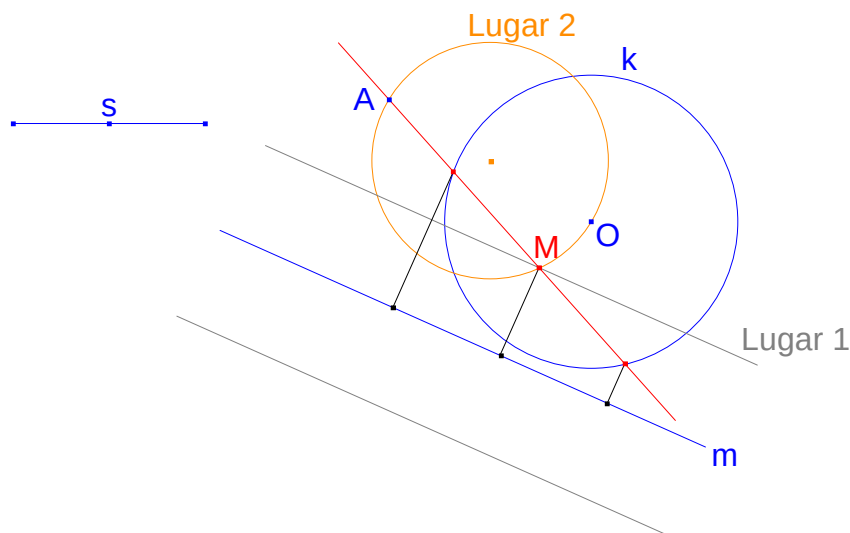
Aunque pareciera que en caso $m = n$, el discriminante va a anularse y por tanto sólo va a haber una solución, puede comprobarse que en este caso la circunferencia de Apolonio de $A, B, m : n$ va a degenerar en una recta, y el discriminante de la ecuación se reducirá al producto $(bm + cq - am)(am + cq - bm)(am + bm - cq)(am + bm + cq)$, pudiendo haber también dos, una o ninguna solución de la misma forma que en el caso $m \neq n$.

23. Por un punto dado, trazar una recta que corte a una circunferencia dada en dos puntos, de tal manera que las distancias de los puntos de intersección a una recta dada sumen una cantidad dada.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Sean A , m , k y s el punto, la recta, la circunferencia (con centro O) y la suma dados. Siendo s la suma de las distancias de los extremos de la cuerda a la recta m , será $\frac{s}{2}$ la distancia de la recta m al punto medio M de dicha cuerda. Por otro lado, el punto medio M de la cuerda deberá estar en la circunferencia con diámetro OA , ya que AM y OM deben ser perpendiculares.

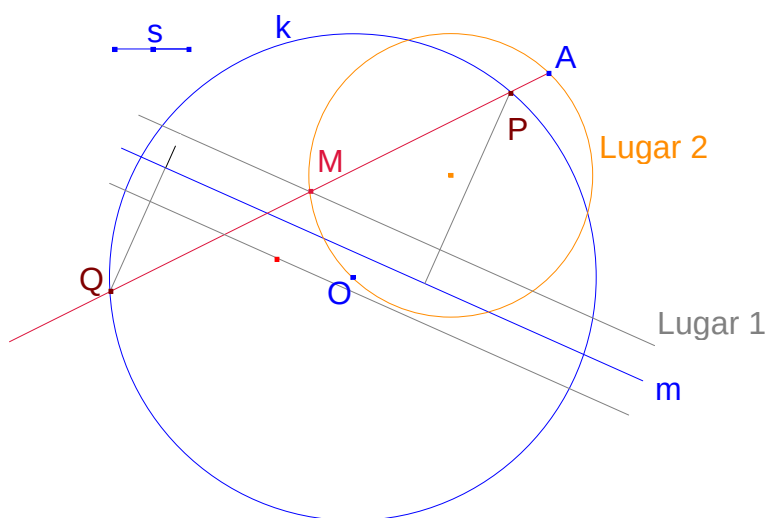


En consecuencia, los posibles M , puntos medios de las cuerdas buscadas deberán ser estar en la intersección de dos lugares geométricos:

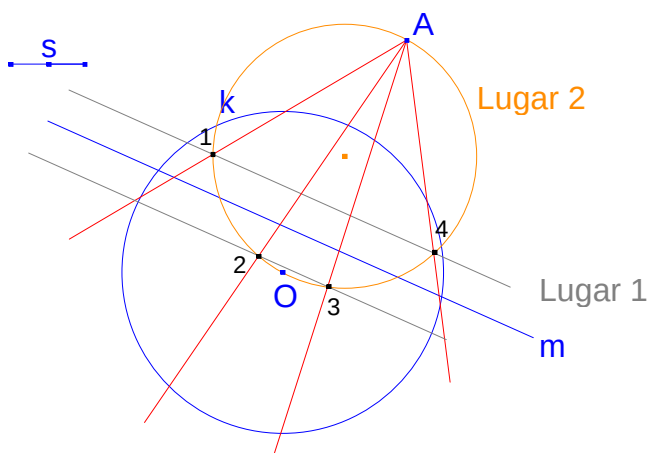
1. Rectas paralelas a m , a distancia $\frac{s}{2}$ de ella.
2. Circunferencia con diámetro OA .

DISCUSIÓN: En el ejemplo mostrado en la figura anterior, vemos que la intersección de los dos lugares geométricos está formada por dos puntos, aunque uno solo de ellos está en el círculo circunferencia, dando lugar a una única solución.

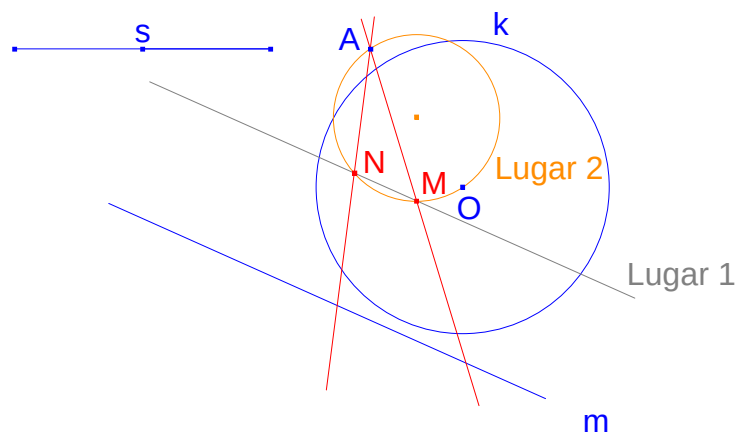
Puede ocurrir, como se ve en la figura siguiente, que aunque el punto M esté en el interior del círculo, no se satisfaga la condición requerida. En lugar de sumar s las distancias desde los extremos P y Q a la recta m , la diferencia de dichas distancias es s .



Incluso aunque sean cuatro los puntos de intersección de dos lugares geométricos que caen dentro del círculo, puede que ninguno de ellos dé una solución del problema:



Esta figura muestra un caso con dos soluciones del problema



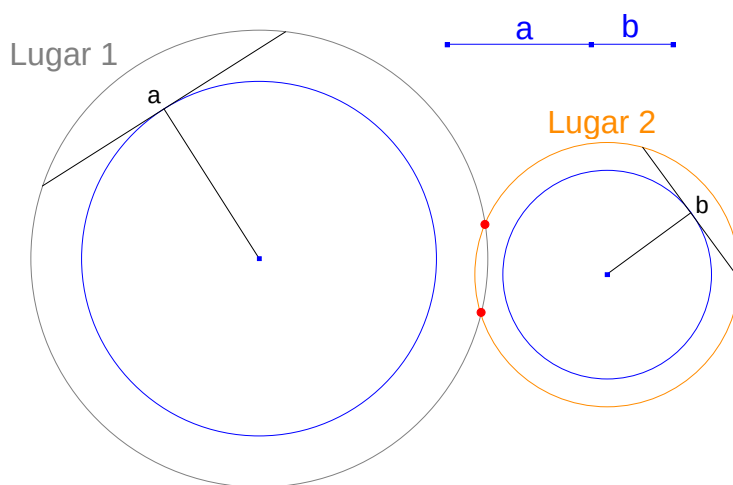
CREO QUE NO PUEDE HABER MÁS DE DOS SOLUCIONES DEL PROBLEMA.

24. Halla un punto de tal manera que las tangentes trazadas desde él a dos circunferencias dadas tengan longitudes dadas.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Usaremos que el lugar geométrico de los extremos de segmentos tangentes de la misma longitud a una circunferencia es otra circunferencia concéntrica a la primera.



Sean a y b las longitudes dadas. Por un punto cualquiera cada circunferencia trazamos un segmento de tangente, con longitud $2a$ y $2b$ respectivamente. Ahora trazamos las circunferencias concéntricas a las dadas que tienen a los segmentos por cuerda. La intersección de las dos circunferencias nos darán las soluciones del problema.

DISCUSIÓN: Por obtenerse las soluciones como intersección de dos circunferencias, puede haber dos soluciones, una o ninguna. Puede comprobarse que hay solución única cuando

$$d^2 = a^2 + b^2 + r_1^2 + r_2^2 \pm 2\sqrt{a^2b^2 + b^2r_1^2 + a^2r_2^2 + r_1^2r_2^2},$$

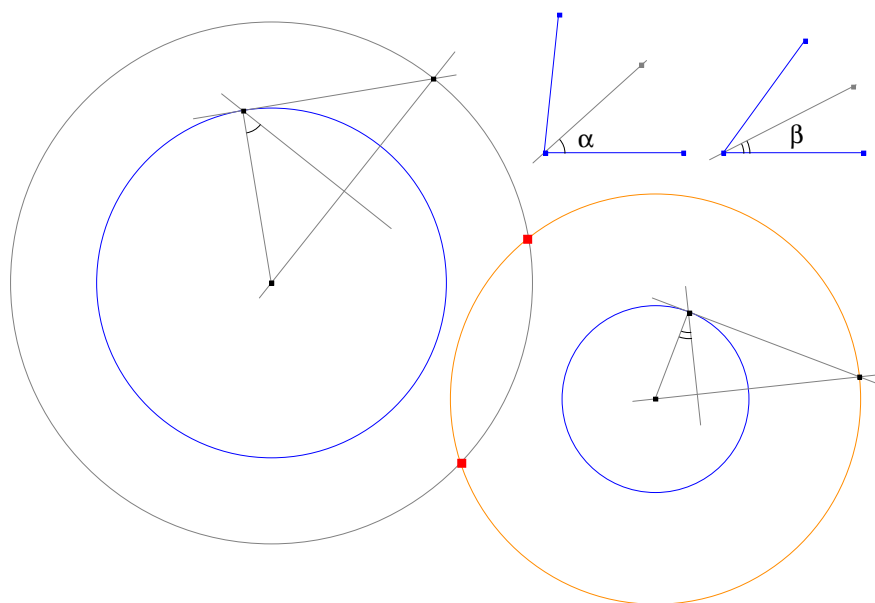
siendo d la distancia entre los centros y r_1, r_2 los radios de la primera y segunda circunferencia. Si d está entre los dos valores, hay dos soluciones, y en otro caso, no hay solución.

25. Determinar un punto desde el que se vean dos circunferencias dadas bajo dos ángulos dados.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: El lugar geométrico de los puntos cuyo par de tangentes comunes a una circunferencia forman el mismo ángulo es una circunferencia concéntrica a la primera.



DISCUSIÓN: Al obtenerse las soluciones como intersección de dos circunferencias, puede haber dos, una o ninguna solución. Puede comprobarse que hay solución única cuando d toma alguno de los valores

$$\frac{|r_2 \operatorname{sen} \alpha \pm r_1 \operatorname{sen} \beta|}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}.$$

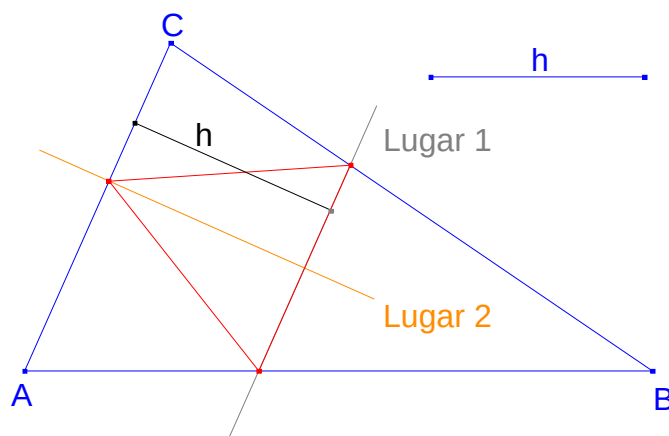
Cuando d varía entre estos dos números hay dos soluciones y en otro caso no hay ninguna solución.

26. En un triángulo dado, inscribir un triángulo isósceles de altura dada, de manera que su base sea paralela a uno de los lados.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Sean ABC y h el triángulo y la altura dados. Vamos a obtener el triángulo tal como lo pide el enunciado, con la base paralela al lado AC . De igual forma se efectuaría la construcción con la base paralela a otro lado.



Como la base debe ser paralela al lado AC y la altura h es dada, la base debe estar contenida en una recta paralela a AC distante h de ella (Lugar1). Una vez determinada la base del triángulo isósceles, el vértice opuesto debe estar en la mediatriz de dicha base (Lugar 2). La intersección de este segundo lugar con el lado AC nos da el tercer vértice del triángulo buscado.

DISCUSIÓN: Habrá una solución para cada lado del triángulo ABC , siempre que la altura h dada no supere a la altura del triángulo ABC cuando se considere como base ese lado.

27. Trazar una circunferencia cuyo centro esté sobre una recta dada y cuya periferia esté a distancias dadas de dos rectas dadas.

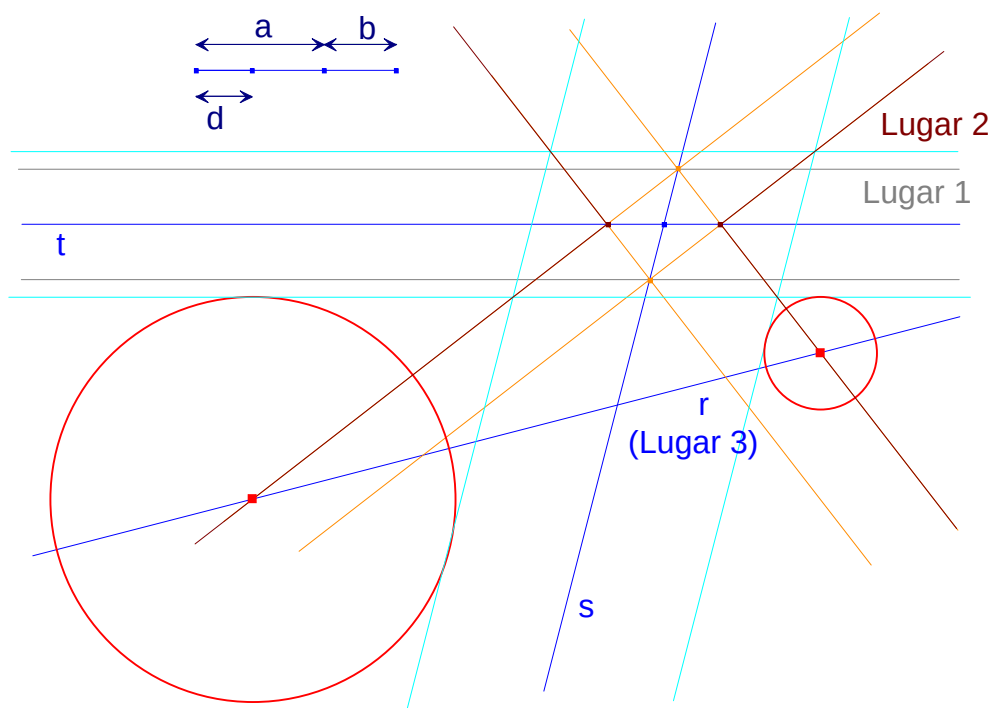
Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

Petersen sugiere que usemos que *el lugar geométrico de los puntos, cuyas distancias a dos rectas dadas poseen una suma o diferencia dadas, es un sistema de cuatro rectas*. Sea k la circunferencia buscada, con centro O y radio R . Sean r la recta que debe contener a O , y s, t las rectas de las que la periferia k estará a distancias a y b respectivamente. Suponemos, sin pérdida de generalidad que $a \geq b$. Entonces será

$$\left. \begin{array}{l} d(O, s) = a + R \\ d(O, t) = b + R \end{array} \right\} \Rightarrow d(O, s) - d(O, t) = a - b,$$

es decir, O estará en el sistema de cuatro rectas mencionado para la diferencia $a - b$.



Según esto, trazamos las rectas paralelas a t a distancia $d = a - b$ de ella (Lugar 1).

Después obtenemos el sistema de rectas que contienen a los puntos cuyas distancias a las rectas s y t se diferencian en d (Lugar 2). Los puntos que cumplen exactamente esa condición forman una semirrecta de cada una de las cuatro rectas, tal como se muestra en la figura.

La intersección con la recta r (Lugar 3) da los posibles centros de las circunferencias buscadas.

Podemos observar que las semirrectas que forman el Lugar 2, son bisectrices de los ángulos formados por rectas paralelas a s y t , a distancias a y b respectivamente de ellas, lo que proporciona otro método para resolver el problema: trazamos las rectas paralelas que están a distancia a y b de s y t , respectivamente. Los centros de las circunferencias buscadas se hallarán al intersecar con la recta r las bisectrices de los ángulos formados por estas paralelas.

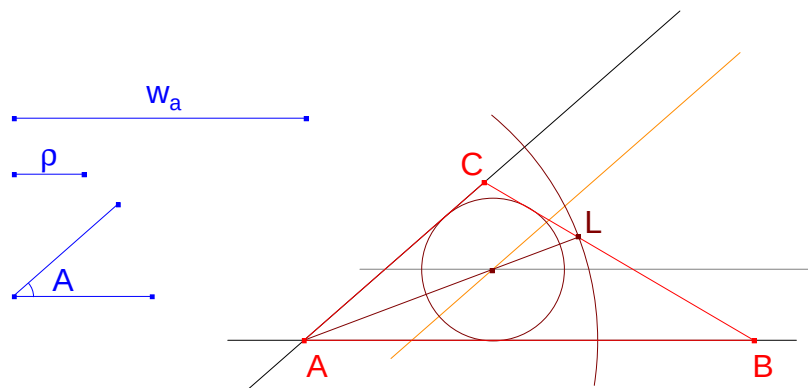
DISCUSIÓN: Generalmente habrá dos soluciones del problema, como muestra la figura anterior. Hay dos situaciones especiales:

1. Si la recta r contiene a una de las semirrectas que forman el Lugar 2, el problema tendrá infinitas soluciones, una por cada punto de dicha semirrecta.
2. Si la recta r es paralela a una de esas semirrectas, pero no tiene intersección con ninguna, el problema no tiene solución.

28. Construir un triángulo conociendo A , w_a y ρ .

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Dibujamos dos semirrectas AB y AC formando un ángulo A , que contendrán los lados del triángulo. La circunferencia inscrita al triángulo ABC tendrá por centro el punto de intersección de dos rectas paralelas a AB y AC y a distancia ρ de ellas. El punto L , extremo de la bisectriz queda determinado por la bisectriz del ángulo A y la circunferencia con centro A y radio w_a . Trazando por L una tangente a la circunferencia inscrita obtenemos el lado BC .

DISCUSIÓN: Para que haya solución, la longitud w_a debe ser lo suficientemente grande como para abarcar a la circunferencia inscrita, concretamente debe ser

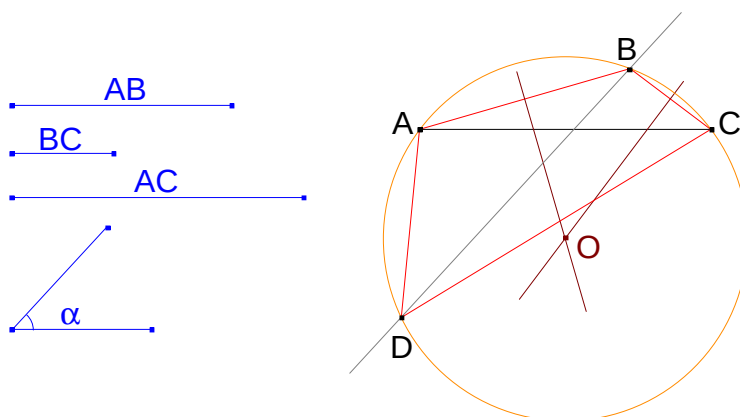
$$w_a \geq \left(\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + 1 \right) \rho.$$

Salvo en el caso de la igualdad, en el que L será el punto de tangencia con la circunferencia inscrita, se podrán trazar desde L dos tangentes a la misma, dando lugar a dos triángulos iguales.

29. Construir un cuadrilátero inscribible, conociendo AB , BC , AC y el ángulo formado por las diagonales.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: En primer lugar construimos un triángulo con lados AB , BC y AC . Concretamente, fijamos el lado AC (que será una de las diagonales), y con centros en A y C trazamos circunferencias de radios AB y BC , que determinarán el punto B .

El punto D estará en la circunferencia circunscrita a A , B y C . También estará en la recta que, pasando por B , forma el ángulo dado con AC .

DISCUSIÓN: Para que exista solución, los segmentos AB , BC , AC deben formar triángulo. Además, para que exista solución es necesario que el punto D obtenido no caiga en el arco ABC .

30. Construir un punto tal que las tangentes trazadas desde él a tres circunferencias dadas sean de la misma longitud.

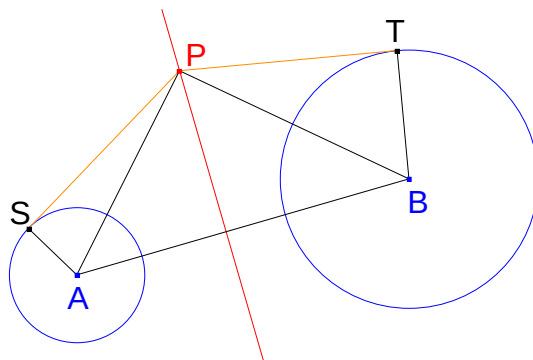
Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Si desde un punto P son iguales las tangentes a dos circunferencias con centros A y B y radios r_1 y r_2 , tendremos

$$PS^2 = PT^2 \Rightarrow PA^2 - r_1^2 = PB^2 - r_2^2 \Rightarrow PA^2 - PB^2 = r_1^2 - r_2^2 = \text{cte.}$$

Por tanto, P estará en una recta perpendicular al segmento AB .

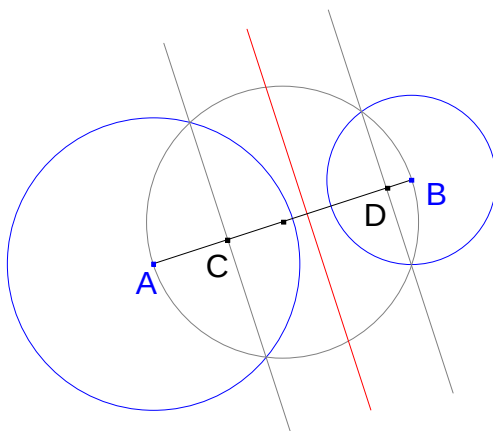


Es evidente que esta recta es el eje radical de las dos circunferencias, es decir, el conjunto de puntos que tienen la misma potencia respecto de las dos circunferencias. Para trazar el eje radical de dos circunferencias secantes o tangentes, basta trazar la recta que une los puntos de intersección o la perpendicular a la recta que une los centros por el punto de tangencia.

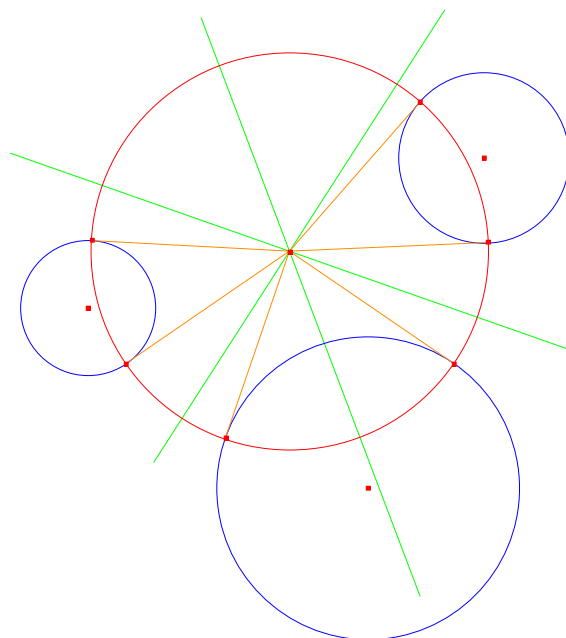
Si las circunferencias no tienen ningún punto común (y no son concéntricas), para trazar el eje radical procedemos de la siguiente manera:

1. Trazamos la circunferencia con diámetro AB .
2. Unimos los puntos de intersección de esta circunferencia con cada una de las dadas. Resultarán dos rectas perpendiculares a AB que cortarán a AB en dos puntos C y D .

3. El eje radical es la mediatriz del segmento CD



Para encontrar el punto pedido por el enunciado bastará trazar dos ejes radicales de dos pares de las tres circunferencias (los tres ejes radicales se cortan en un punto llamado centro radical). La siguiente figura muestra los tres ejes radicales y como son iguales las tangentes trazadas desde el centro radical a las tres circunferencias.



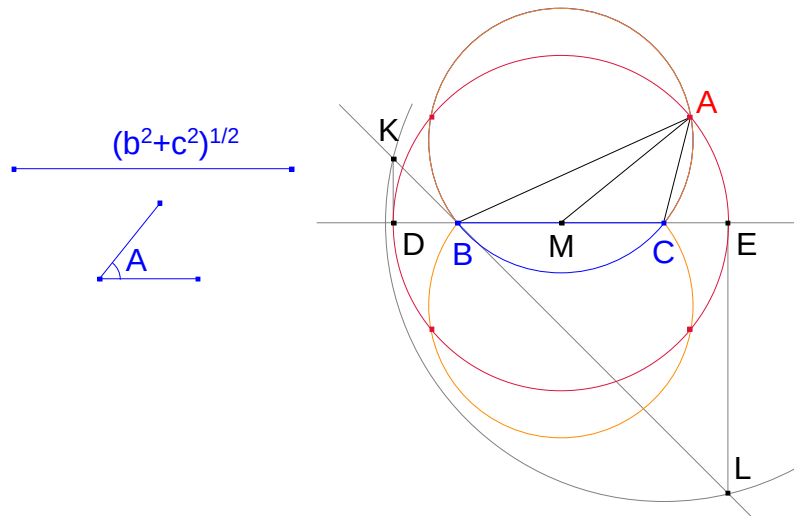
31. Construir un triángulo conociendo A , a y $b^2 + c^2$.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Fijamos un segmento BC de longitud a . Las soluciones del problema se obtienen como intersección de dos lugares geométricos:

1. El arco capaz del segmento a para el lado A .
2. La circunferencia formada por los puntos tales que los cuadrados de las distancias a los vértices B y C suman $b^2 + c^2$.



La figura contiene los detalles par el segundo lugar geométrico. Recordemos que si M es el punto medio de BC y P es cualquier punto tal que $PB^2 + PC^2 = b^2 + c^2$, al ser PM la mediana del triángulo PBC ,

$$PM^2 = \frac{PB^2 + PC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \text{cte.} \quad (1)$$

Esto confirma que P , y por tanto A , debe estar en una circunferencia de centro M . Para obtener los puntos de intersección de esta circunferencia con la recta BC , trazamos por B una recta KBL que forme un ángulo de 45°

con ella, y trazamos una circunferencia con centro C y radio $\sqrt{b^2 + c^2}$ que cortará a la recta KBL en los puntos K y L . Al proyectar perpendicularmente los puntos K y L sobre la recta BC , obtendremos los puntos buscados D y E .

En efecto, $b^2 + c^2 = KC^2 = KD^2 + DC^2 = DB^2 + DC^2$, y de igual forma se cumplirá que $EB^2 + EC^2 = b^2 + c^2$, así que B y C cumplen la propiedad y deben estar en la circunferencia.

DISCUSIÓN: La igualdad (1) indica que para que exista el segundo lugar geométrico debe ser $b^2 + c^2 > 2a^2$.

Además, puede comprobarse que para que haya intersección de los dos lugares geométricos es necesario que

$$\tan A \leq \frac{a\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{b^2 + c^2 - a^2},$$

correspondiendo la igualdad al caso en que los lugares geométricos (dos soluciones) y la desigualdad estricta al caso en que son secantes (cuatro soluciones).

Para el lector interesado, este resultado aparece al intentar resolver el sistema de ecuaciones formado por los dos lugares geométricos (habiendo establecido previamente un sistema de coordenadas con el segmento sobre el eje x y centrado en el origen de coordenadas):

$$\begin{aligned} x^2 + \left(y - \frac{a \cos A}{2 \sin A}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2 \sin A}\right)^2, \\ x^2 + y^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

32. En un triángulo dado, encontrar un punto tal que las líneas que lo unen con los vértices, dividen el triángulo en tres triángulos equivalentes.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

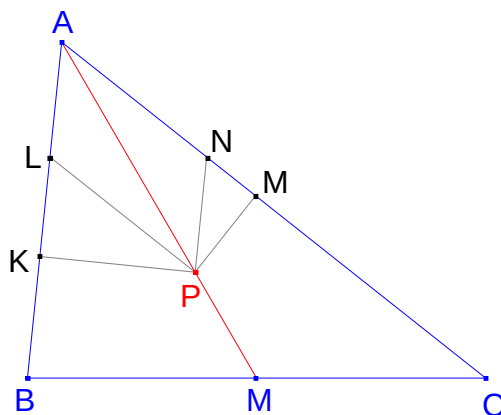
En el mismo enunciado, Julius Petersen da la siguiente indicación:

Sea ABC el triángulo, O el punto buscado. Si $\triangle AOB$ y $\triangle AOC$ son equivalentes, el lugar geométrico de O es una recta que pasa por A . Como la mediana divide al triángulo en dos partes equivalentes, el punto medio de BC debe ser un punto del lugar; por tanto, el lugar debe ser esa mediana. El punto buscado es, por tanto, el punto de intersección de las medianas.

La parte más delicada es la afirmación de que *el lugar geométrico de O es una recta que pasa por A* . Supongamos que P varía cumpliendo la igualdad $(APB) = (APC)$. Sean PK y PM las alturas de los triángulos APB y APC (considerando a AB y AC como bases). Entonces,

$$(APB) = (APC) \Rightarrow AB \cdot PK = AC \cdot PM \Rightarrow PK : PM = AC : AB.$$

Según el apartado **g** (pág. 11) de lugares geométricos de puntos, el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos rectas están en una razón dada, son dos rectas que pasan por el punto de intersección de las dos rectas dadas. Para mayor claridad, vamos a razonar este hecho directamente:



Hagamos variar a P el interior del triángulo ABC , y tracemos por P paralelas y perpendiculares a AB y AC , como indica la figura.

La orientación de los lados del triángulo PKL no varían, por lo que este triángulo se mantiene semejante. También se mantiene semejante el triángulo PMN . Eso quiere decir que las razones $\frac{PK}{PL}$ y $\frac{PM}{PN}$, así como el cociente de ambas $\frac{PK \cdot PN}{PM \cdot PL}$ permanece siempre constante. Por ello, los puntos para los que $PK : PM$ es constante son los mismos que aquellos para los que $PN : PL$ o $LA : PL$ es constante. Pero entonces, el triángulo ALP se mantiene semejante, ya que el ángulo $\angle ALP$ es fijo. Se deduce entonces que el ángulo $\angle PAL$ es fijo y P debe estar en una recta que pasa por A .

Como el punto medio M del lado BC hace equivalentes a los triángulos BMA y MCA , M debe estar en dicha recta, y por eso la recta en cuestión es la mediana que pasa por A .

Por el mismo razonamiento, O debe ser el punto común a las tres medianas.

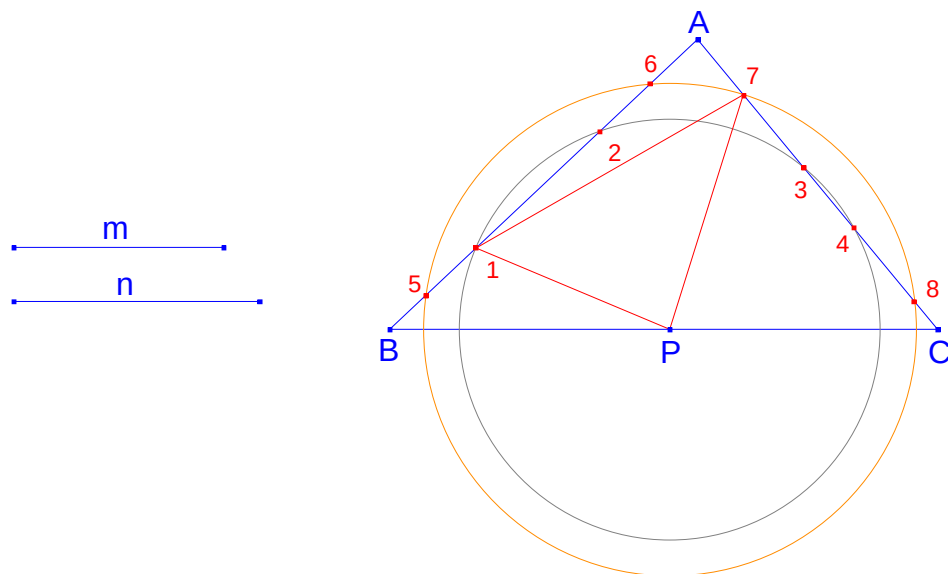
33. En un triángulo dado, inscribir un triángulo donde dos de los lados son dados, y de tal manera que uno de sus vértices sea un punto dado.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

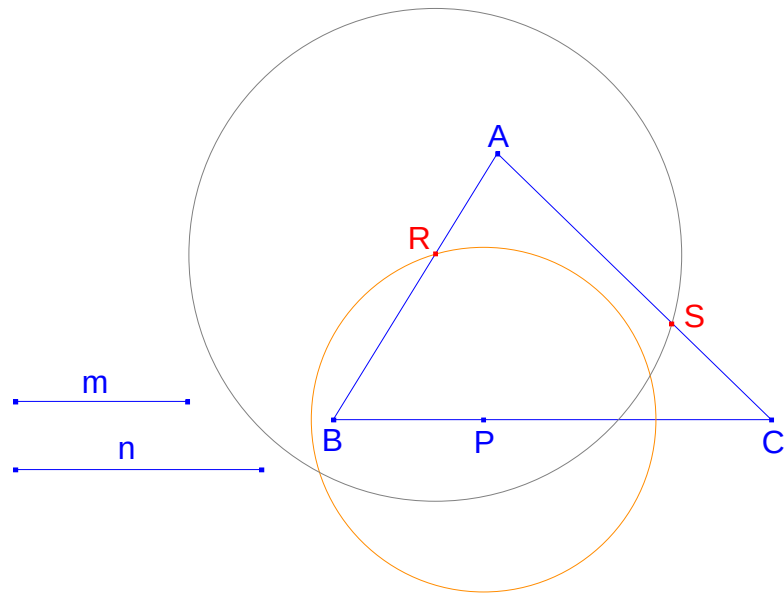
CONSTRUCCIÓN: Vamos a poder construir el triángulo pedido en el enunciado de tres formas diferentes:

1. Consideramos el caso en el que el punto dado es un extremo de los dos lados dados.



Sean P el punto dado y m y n las longitudes de los lados dados. Con centro P trazamos circunferencias con radios m y n . Por cada vez que una circunferencia corte a un lado y la otra al otro, tendremos una solución del problema. En la figura, las circunferencias centradas en P con radios m y n cortan cada una a cada lado en dos puntos. De esta forma conseguimos ocho soluciones: $P17$ (mostrado en la figura), $P18$, $P27$, $P28$, $P35$, $P36$, $P45$ y $P46$.

- Ahora suponemos el caso en el que el punto P es extremo del segmento de longitud m , pero no del de longitud n . Comenzamos trazando una circunferencia con centro P y radio m . Con centro cada uno de los puntos donde la circunferencia corte a cualquiera de los lados que no contienen al punto P , trazamos una circunferencia con radio n y hallamos la intersección con el tercer lado.



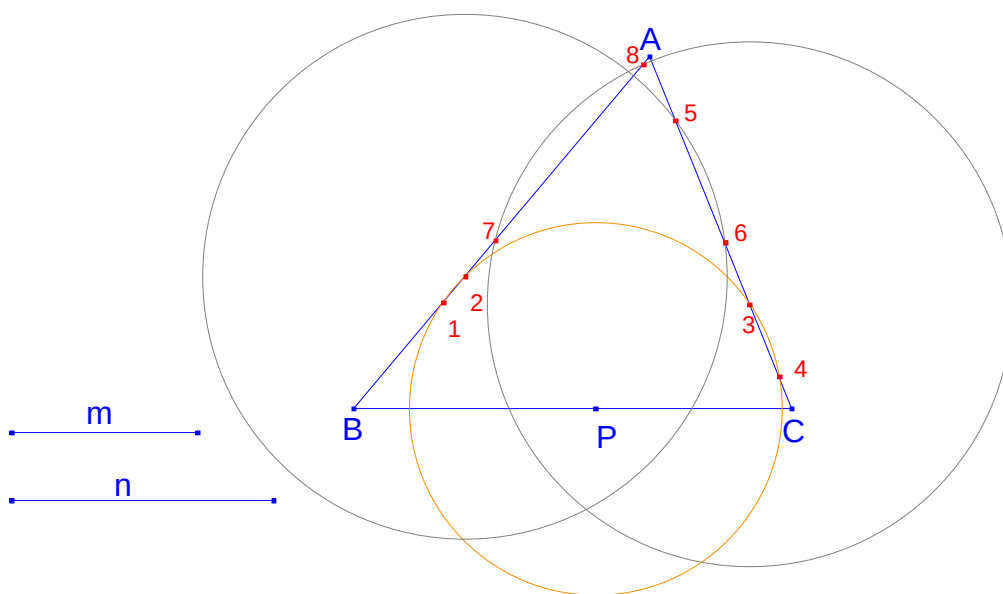
En la figura , la circunferencia con centro P y radio m corta en un solo punto R al lado AB , y no corta al lado AC . La circunferencia con centro R y radio n corta en un solo punto S , al lado AC . Por tanto, PRS sería la única solución que se puede obtener de esta forma.

- Finalmente, podrían obtenerse más soluciones considerando que P es extremo del segmento de longitud n y no del segmento de longitud m .

DISCUSIÓN: Al poder hacer la construcción de varias formas distintas y tener cada una varias posibles soluciones, el número total de soluciones es difícil de precisar.

En la primera forma de hacer la construcción ya hemos visto un ejemplo en el que hay el número máximo de ocho soluciones. En los otros dos, por ejemplo en el segundo, también hay en teoría ocho soluciones posibles, porque

una circunferencia centrada en P y con radio m puede cortar a cada lado en dos puntos y luego una circunferencia centrada en cada uno de ellos con radio n puede cortar al tercer lado en otros dos puntos como máximo. En la siguiente figura se consigue el máximo de soluciones al hallar la primera circunferencia, pero sólo al trazar las circunferencias con los centros 2 y 3 se obtiene intersección con el tercer lado. En total habría sólo cuatro soluciones.



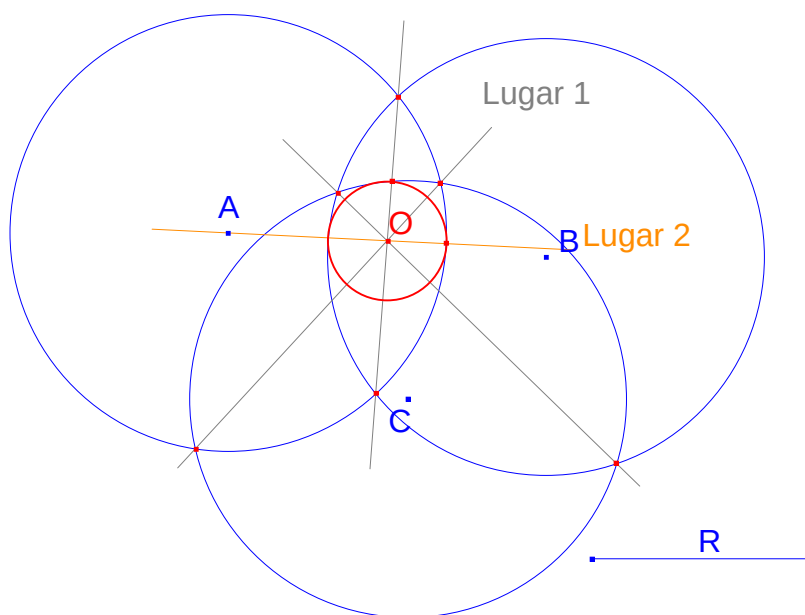
Teniendo en cuenta las tres formas de construcción y las ocho posibilidades de cada una, habría un máximo de 24 soluciones posibles, AUNQUE NO ME QUEDA CLARO QUE PARA UN MISMO TRIÁNGULO EXISTAN ESTAS 24 SOLUCIONES.

34. Construir una circunferencia que sea tangente interiormente a tres circunferencias iguales dadas.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Suponemos que los tres círculos tienen intersección común, pues en caso contrario el problema carecería de solución.



Sean A , B , C los centros de las tres circunferencias dadas, las tres de radio R . Sean O y r el centro y el radio de la circunferencia buscada. Se cumplirá que $OA = OB = OC = R - r$. Por tanto, O está a la misma distancia de los centros A , B y C , por lo que estará en las mediatrices de los segmentos AB , BC y CA . Para hallar uno de los puntos de tangencia, hallamos, por ejemplo, la intersección de la recta OA con la circunferencia de centro A .

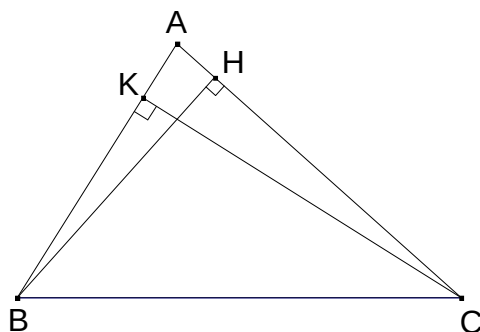
DISCUSIÓN: El sistema tiene solución cuando la intersección de los tres círculos es no vacía y además ninguna intersección de dos círculos está contenida en el tercero. En ese caso la solución es única.

35. Construir un triángulo, conociendo a , h_b y h_c .

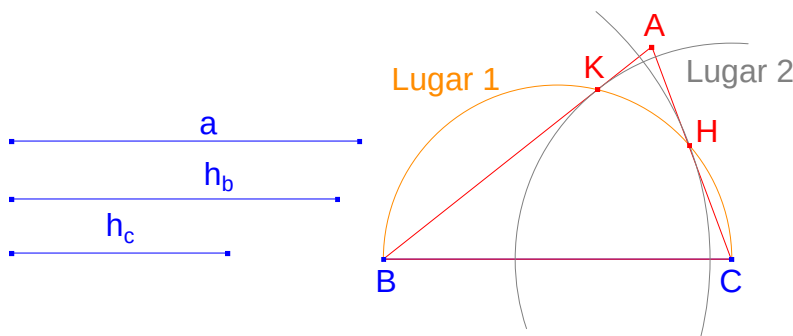
Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Supongamos el problema resuelto.



Sean H y K los pies de las alturas trazadas desde B y C , respectivamente. Como desde H y K se ve el segmento BC bajo un ángulo recto, H y K deben estar en la circunferencia con diámetro BC . Además, H debe estar en la circunferencia de centro B y radio h_b , y K debe estar en la circunferencia de centro C y radio h_c .



DISCUSIÓN: Para que existan los puntos H y K debe ser $h_b \leq a$ y $h_c \leq a$. Obsérvese que si, por ejemplo, es $h_b = a$ y $h_c < a$, entonces el punto H coincide con C , resultando un triángulo rectángulo en A . Pero si $h_b = h_c = a$ el triángulo tendría que ser rectángulo en B y en C , lo cual es imposible.

36. Determinar un punto cuya distancia al vértice de un ángulo esté dada y las distancias a los lados del ángulo estén según una razón dada.

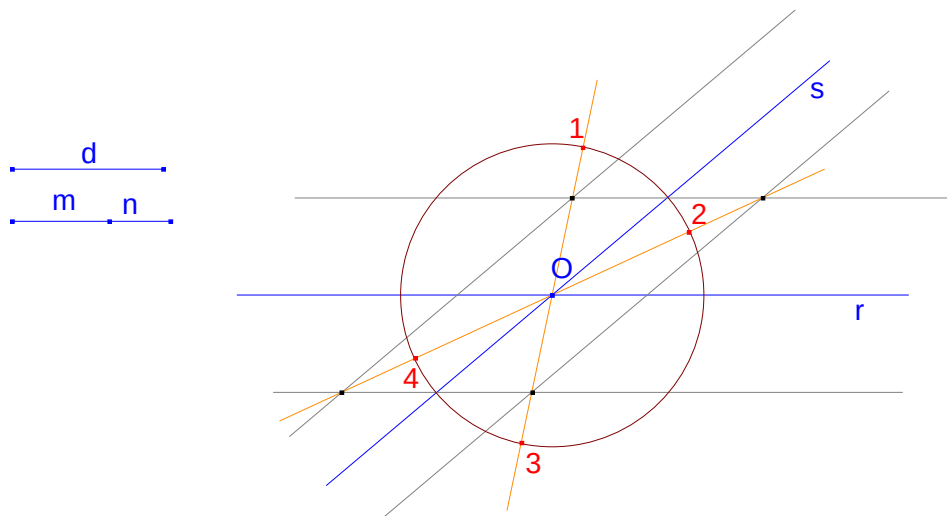
Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Tenemos dos lugares geométricos:

1. El lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos rectas están según una razón dada está formado por dos rectas que pasan por el punto de intersección de ambas.
2. El lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un punto dado es una circunferencia.

En la siguiente figura, O es el vértice del ángulo, d es la distancia a O y $m : n$ es la razón de las distancias a los lados r y s del ángulo.



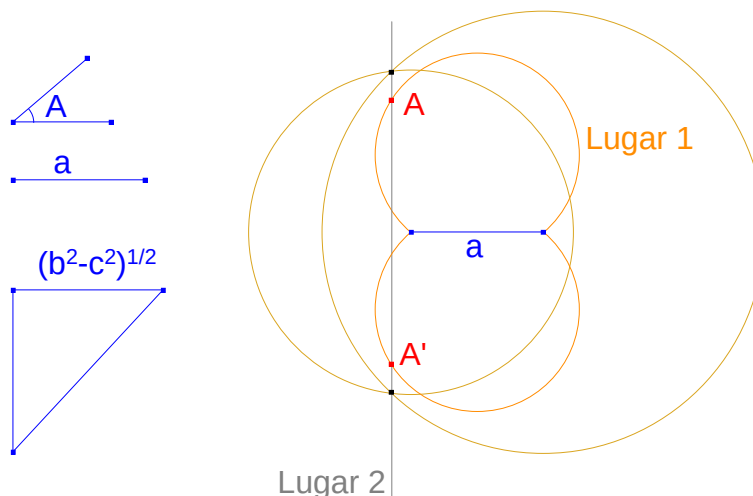
DISCUSIÓN: Como se trata de cuatro rectas que pasan por un punto y una circunferencia centrada en ese punto, siempre habrá cuatro soluciones.

37. Construir un triángulo, conociendo a , A y $b^2 - c^2$.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Fijando el lado BC del triángulo, el punto A estará, por un lado, en el arco capaz del segmento BC para el ángulo dado A , y por otro, al ser, $AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$, A estará en una recta perpendicular al segmento BC , que se determina de la forma siguiente. Consideramos un triángulo rectángulo con un cateto igual a $\sqrt{b^2 - c^2}$. Trazamos circunferencias con centros B y C y con radios el otro cateto y la hipotenusa de este rectángulo. Por el punto de intersección de las dos circunferencias, trazamos la perpendicular a BC .



DISCUSIÓN: La recta puede cortar hasta en cuatro puntos a los dos arcos capaces, pudiendo haber cero, dos, o cuatro soluciones. La condición para que exista solución es que

$$\text{sen } A \leq \frac{2a^3}{(b^2 - c^2)^2},$$

correspondiendo la igualdad al caso en que hay exactamente dos soluciones, una a cada lado del segmento AB .

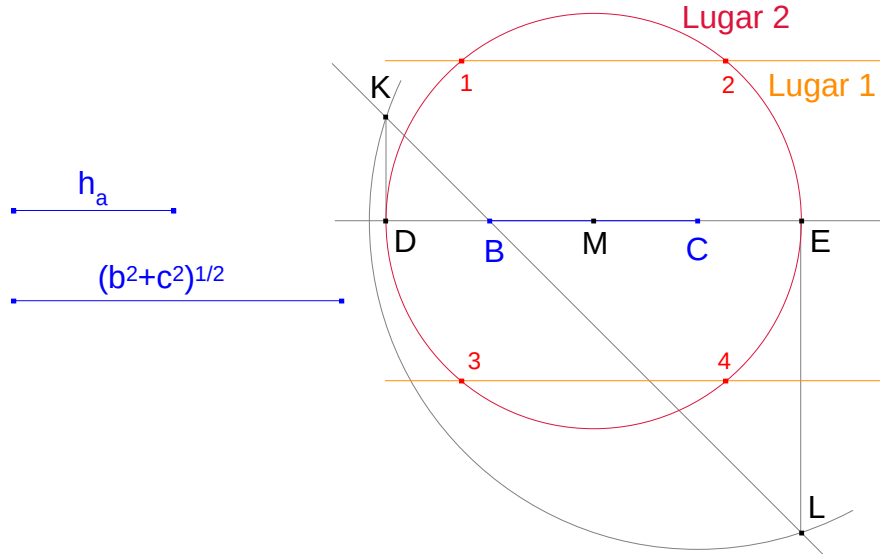
38. Construir un triángulo, conociendo a , h_a y $b^2 + c^2$.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Fijando un segmento BC de longitud a , el tercer vértice A es la intersección de dos lugares geométricos:

1. Puntos que están a distancia h_a de BC .
2. Puntos tales que los cuadrados de las distancias a los puntos B y C suman $b^2 + c^2$, que es una circunferencia centrada en el punto medio M de AB . Los detalles de este lugar geométrico están expuestos en el problema 31.



DISCUSIÓN: Como se dice en la solución del problema 31, para que el segundo lugar geométrico exista debe ser $b^2 + c^2 > 2a^2$. Para que éste tenga intersección con el primero, debe ser

$$h_a \leq \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

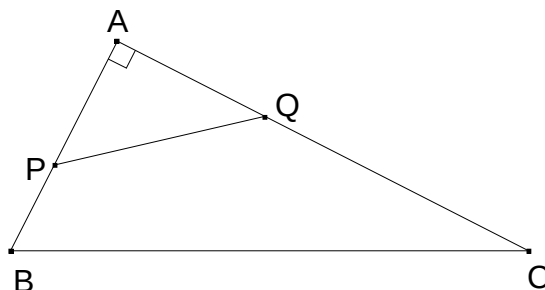
correspondiendo la igualdad al caso en que hay tangencia dando lugar a exactamente dos soluciones, una a cada lado del segmento BC .

39. Construir un triángulo rectángulo, conociendo la altura relativa a la hipotenusa, dos puntos de la hipotenusa y un punto de cada uno de los lados.

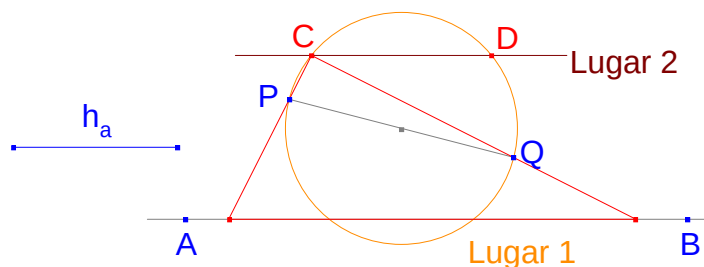
Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Consideramos el problema resuelto:



P y Q son puntos de los lados y A es el ángulo recto. Entonces, el triángulo PAQ es rectángulo, y por tanto A debe estar en la circunferencia de diámetro PQ . Como también debe estar en una recta paralela a hipotenusa, a distancia h_a de ella, podemos hallar A como intersección de dos lugares geométricos:



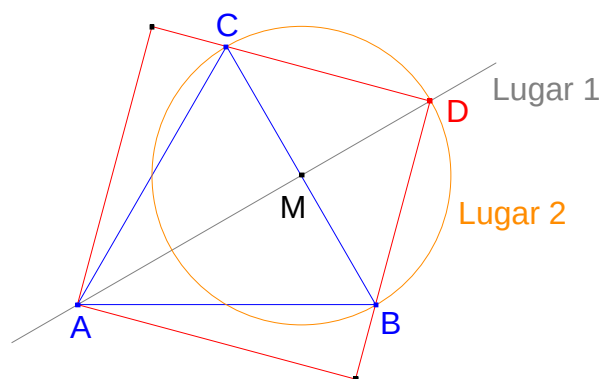
DISCUSIÓN: El número de soluciones del problema depende de la intersección de dos rectas y una circunferencia, por lo que puede haber hasta cuatro soluciones del problema.

40. Circunscribir un cuadrado a un triángulo equilátero, de manera que las dos figuras tengan un vértice común.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Como sugiere Petersen, intentemos buscar el vértice opuesto del cuadrado.



Si A , B , C son los vértices del triángulo equilátero y A va a ser el vértice común con el cuadrado, el punto D , vértice opuesto de A en el cuadrado deberá estar en dos lugares geométricos: por un lado, deberá estar en la mediatriz del segmento BC . Por otro, al ser recto el ángulo $\angle BDC$, deberá estar en la circunferencia de diámetro BC .

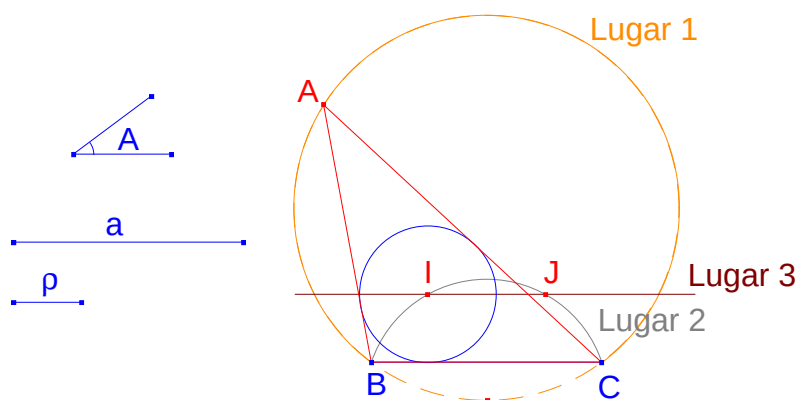
DISCUSIÓN: Podemos hacer una construcción similar para cada lado del cuadrado.

41. Construir un triángulo, conociendo a , A y ρ .

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Fijamos un segmento BC de longitud a . El vértice A del triángulo estará en el arco capaz del segmento BC para el ángulo A (Lugar 1). El incentro de ABC está en una circunferencia ((Lugar 2), centrada en el punto medio del arco BC del Lugar 1 y pasando por los puntos B y C . Por último, este incentro estará en una recta paralela a BC a distancia ρ de ella (Lugar 3). Una vez hallados los posibles incentros I , J de las soluciones, es fácil trazar la circunferencia inscrita. Los lados BA y CA se pueden obtener trazando tangentes a la esta circunferencia desde B y A .



DISCUSIÓN: El Lugar 2 y el Lugar 3 tendrán intersección común cuando

$$\tan \frac{A}{2} \leq \frac{a^2 - 4\rho^2}{4a\rho},$$

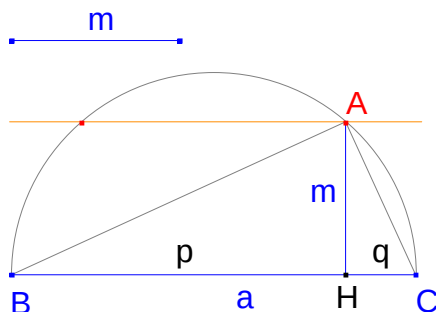
correspondiendo la igualdad al caso en que ambos lugares son tangentes, dando lugar a una única solución a cada lado del segmento BC .

42. Cortar un segmento dado en dos partes que tengan por media proporcional un segmento dado.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Sean a y m las longitudes del segmento y de la media proporcional dados (Lugar 1). Sobre el segmento dado BC de longitud a trazamos una circunferencia que lo tenga por diámetro. Trazamos una paralela al segmento BC a distancia m de él (Lugar 2). Los puntos de corte de los dos lugares determinarán segmentos de longitud m que serán media proporcional de las partes en que dividen al segmento dado.



En efecto, la semejanza de los triángulo AHB y CHA implica que

$$AH : HB = CH : HA \Rightarrow m : p = q : m \Rightarrow m^2 = pq.$$

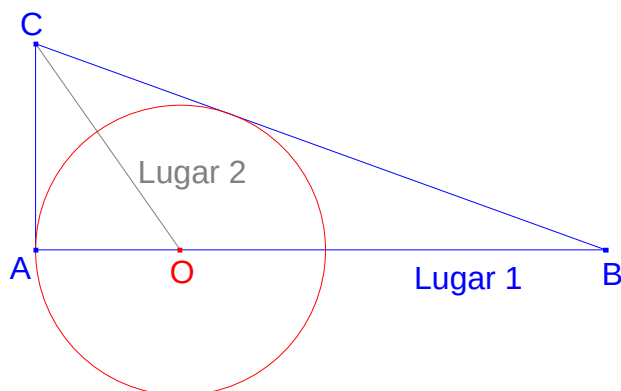
DISCUSIÓN: Para que el problema tenga solución, es necesario que exista la intersección de los dos lugares geométricos, es decir, debe cumplirse que $m \leq \frac{a}{2}$. La igualdad corresponde a una única solución del problema y la desigualdad estricta corresponde a dos soluciones simétricas.

43. Dado un triángulo rectángulo, construir una circunferencia tangente a la hipotenusa, que pase por el vértice del ángulo recto y tenga su centro sobre uno de los lados.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Sea el triángulo ABC , rectángulo en A , y supongamos la circunferencia pedida tiene su centro en AB (Lugar 1).



Como el centro O de la circunferencia buscada debe distar lo mismo de las rectas AB y BC , O deberá estar en la bisectriz de ángulo BCA (Lugar 2). La intersección de los dos lugares nos dará el punto O .

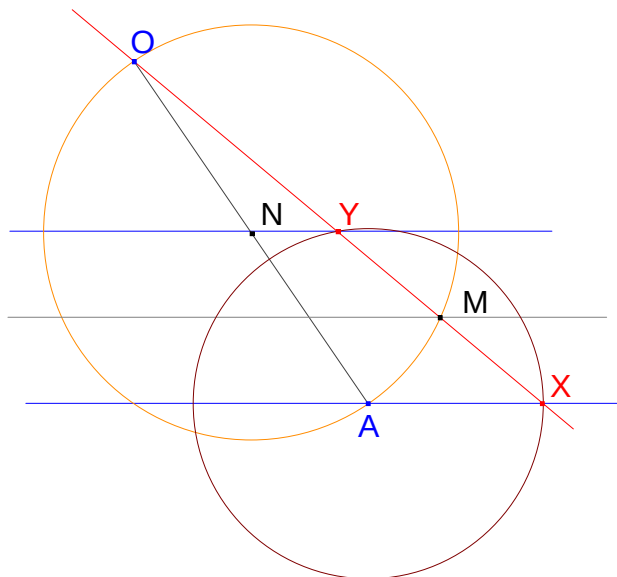
DISCUSIÓN: El problema dos soluciones para cada triángulo rectángulo, una por cada cateto.

44. Dadas dos rectas paralelas, un punto A en una de ellas y otro punto O en cualquier lugar fuera, trazar por O una recta que corte en X a la paralela pasando por A y en Y a la otra paralela, de manera que $AX = AY$.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Como sugiere Petersen, tratemos de determinar el punto medio M de XY . Para ello, supongamos el problema resuelto:



Como $AX = AY$, X e Y estarán en una misma circunferencia de centro A , y M será el punto medio de la cuerda trazada desde el punto O . Entonces, desde O el segmento OA se verá bajo un ángulo recto. Además, el punto M estará a la misma distancia de las dos rectas paralelas, por lo que M deberá estar en una paralela intermedia a ambas.

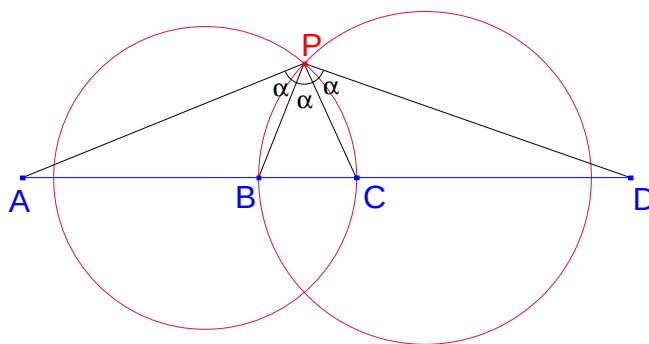
DISCUSIÓN: En el caso particular de que O esté en la paralela que no contiene a A , será $Y = O$. Si el punto O está en la paralela intermedia a las dos paralelas dadas, la recta OM será precisamente dicha paralela intermedia, por lo que el problema no tendrá solución.

45. Determinar un punto desde el que se vean bajo el mismo ángulo tres segmentos AB , BC y CD de una misma recta dada.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Suponemos el problema resuelto.



Si P es el punto buscado, PB es la bisectriz del ángulo APC . En consecuencia,

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PC}{BC} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AB}{BC},$$

es decir P debe estar en la circunferencia de Apolonio de $A, C, AB : BC$. De igual forma podemos razonar que P estará en la circunferencia de Apolonio de $B, D, BC : CD$. Por tanto, el punto P se obtendrá como intersección de las dos circunferencias.

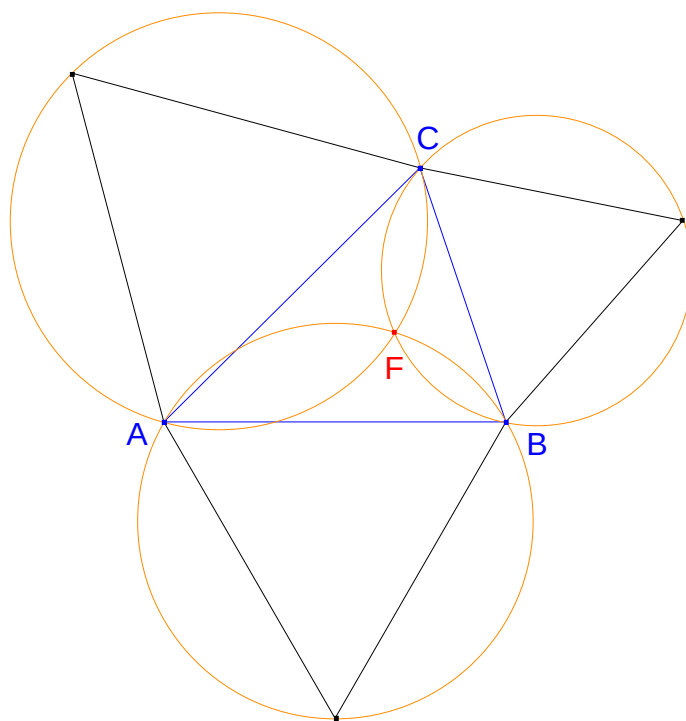
DISCUSIÓN: Si son iguales los segmentos AB y BC o BC y CD , las circunferencias de Apolonio se convierten en rectas perpendiculares a la recta dada por los puntos B y C , respectivamente. Si los segmentos AB , BC y CD son los tres iguales, tendremos dos rectas paralelas y el problema no tendrá solución. En cualquier otro caso, habrá dos soluciones, una a cada lado de la recta dada.

46. En un triángulo, determinar un punto desde el que los tres lados parezcan lo mismo de grandes (se vean con el mismo ángulo).

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Desde el punto buscado los tres lados deberán verse con un ángulo de 120° . Como el suplementario de 120° es 60° , este punto estará en las circunferencias circunscritas a triángulos equiláteros construidos sobre los vértices.



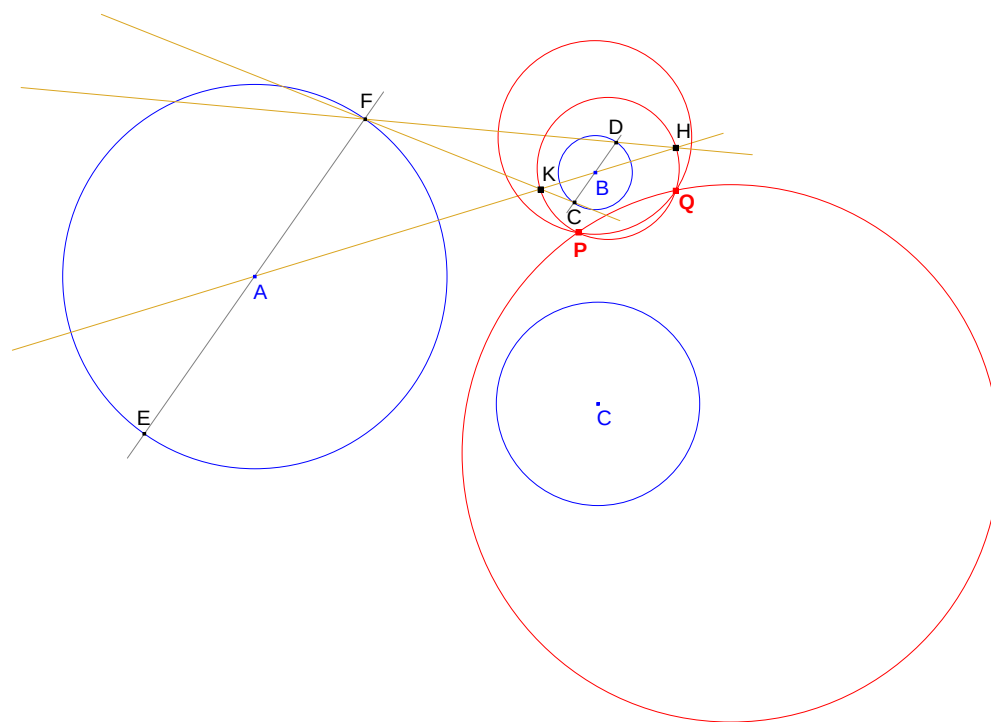
DISCUSIÓN: Hay solución única para cualquier triángulo. Al punto obtenido se le llama *punto de Fermat* del triángulo ABC.

47. Determinar un punto desde el que se vean del mismo tamaño tres circunferencias dadas.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Como sugiere Petersen, las distancia del punto a los centros de las circunferencias estarán entre ellas según las razones de los radios.



Por ello, si las circunferencias tienen centros A, B, C y radios r, s, t , respectivamente, los puntos buscados serán las intersecciones de las circunferencias de Apolonio para $A, B, r : s$, $B, C, s : t$ y $A, C, r : t$. En la figura se detalla la construcción de la primera de estas circunferencias y se ve que las tres circunferencias se cortan en dos puntos.

DISCUSIÓN: Este problema coincide esencialmente con el problema 22 (pág. 46). Allí se estudian con detalle las condiciones para la existencia de soluciones.

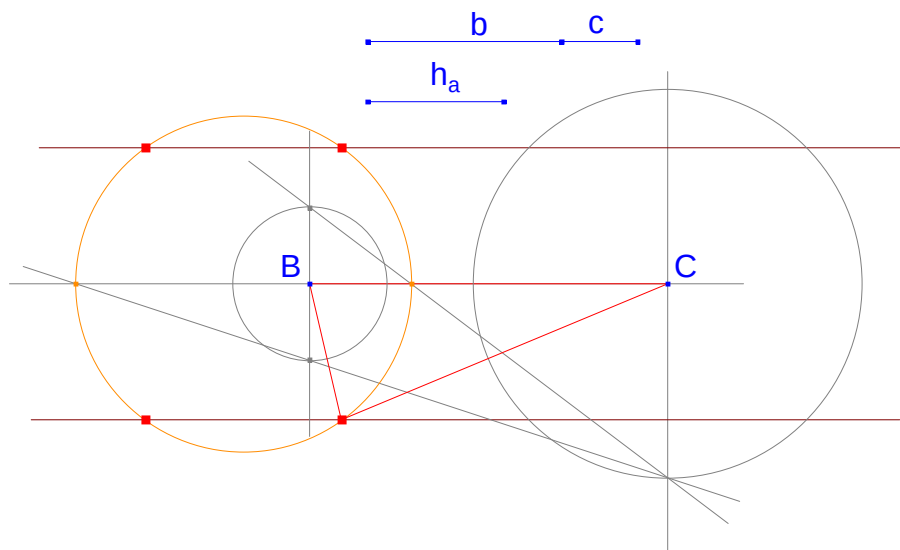
48. Construir un triángulo conociendo a , h_a y $b : c$.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Fijamos un segmento BC de longitud a . El tercer vértice A deberá estar en dos lugares geométricos:

1. Una recta paralela a BC a distancia h_a de ella.
2. La circunferencia de Apolonio para $B, C, c : b$.



DISCUSIÓN: Puede haber hasta cuatro puntos de intersección entre la circunferencia de Apolonio y las rectas paralelas a BC . La condición para que exista intersección es que

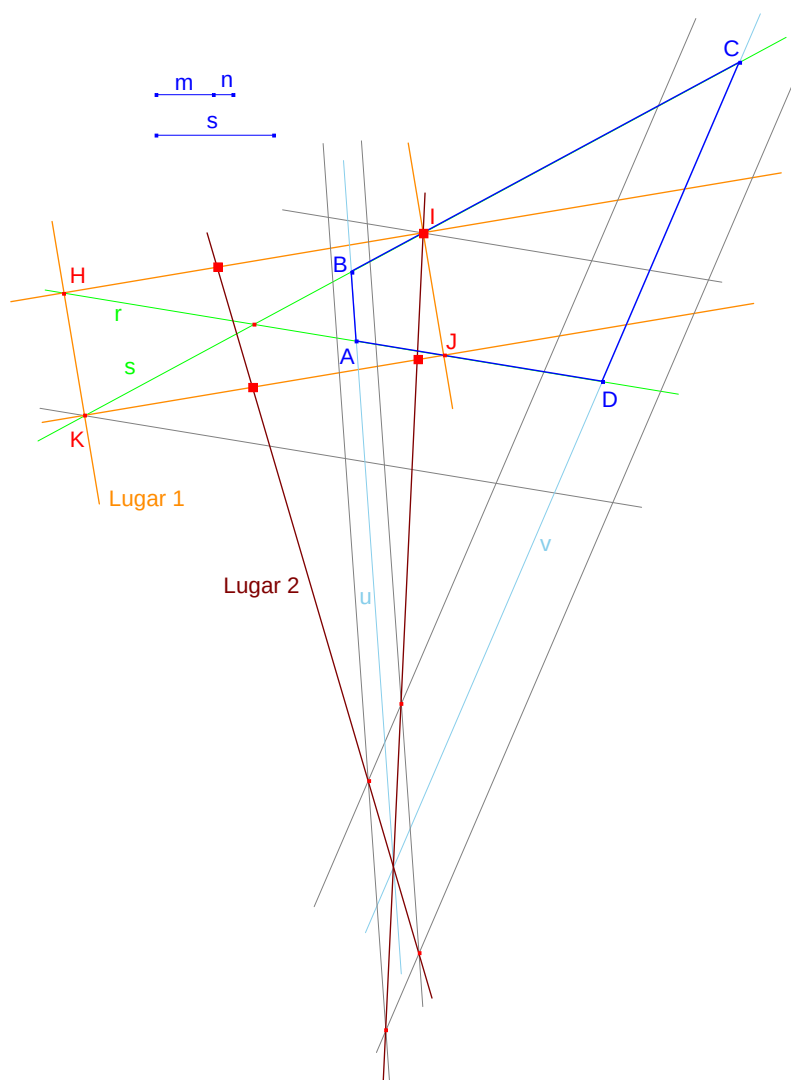
$$h_a \leq \frac{abc}{|b^2 - c^2|},$$

correspondiendo la igualdad al caso en que hay tangencia entre los dos lugares geométricos. Observemos que cuando el cociente se anula ($b = c$) la circunferencia de Apolonio se convierte en la mediatriz del segmento BC , que siempre tendrá intersección con las rectas paralelas a BC .

49. En un cuadrilátero dado, encontrar un punto tal que las distancias a los de los lados opuestos tengan una suma dada y las distancias a los otros estén en una razón dada.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN



CONSTRUCCIÓN: Tenemos dos lugares geométricos:

1. El lugar geométrico de los puntos, cuyas distancias a dos rectas dadas poseen una suma, s es un rectángulo HJK .
2. El lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias a dos rectas dadas están en una razón dada $m : n$ está formado por dos rectas u y v que pasan por el punto de intersección de las rectas dadas.

La intersección de los dos lugares geométricos nos da la solución del problema.

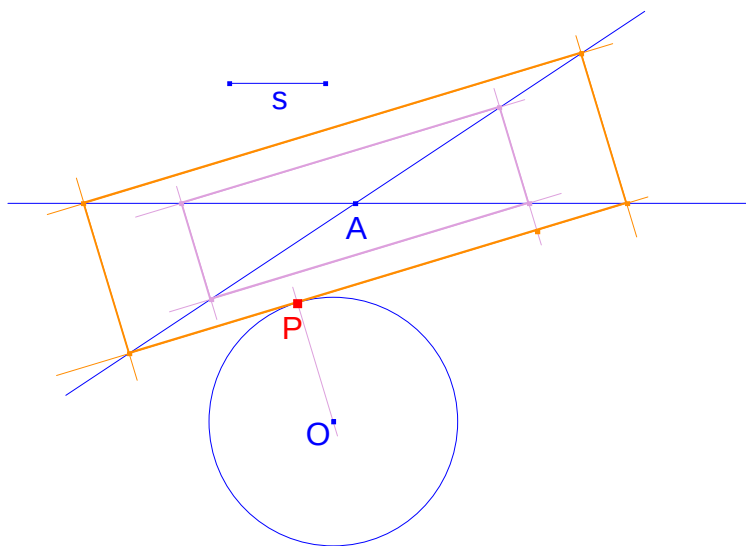
DISCUSIÓN: Las dos rectas del Lugar 2 cortarán al rectángulo del Lugar 1 a lo sumo en cuatro puntos. La figura muestra el caso en el que uno de los puntos está en el perímetro del cuadrado y los otros tres están fuera.

50. Sobre una circunferencia dada, encontrar un punto tal que la suma de las distancias a dos rectas dadas sea mínima.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Sabemos que los puntos cuya suma a dos rectas es una constante s forman un rectángulo con centro el punto de intersección dichas rectas. Si queremos que el punto esté en una circunferencia dada y que la distancia sea mínima, el rectángulo deberá ser tangente a la circunferencia y el punto de tangencia será el punto buscado.

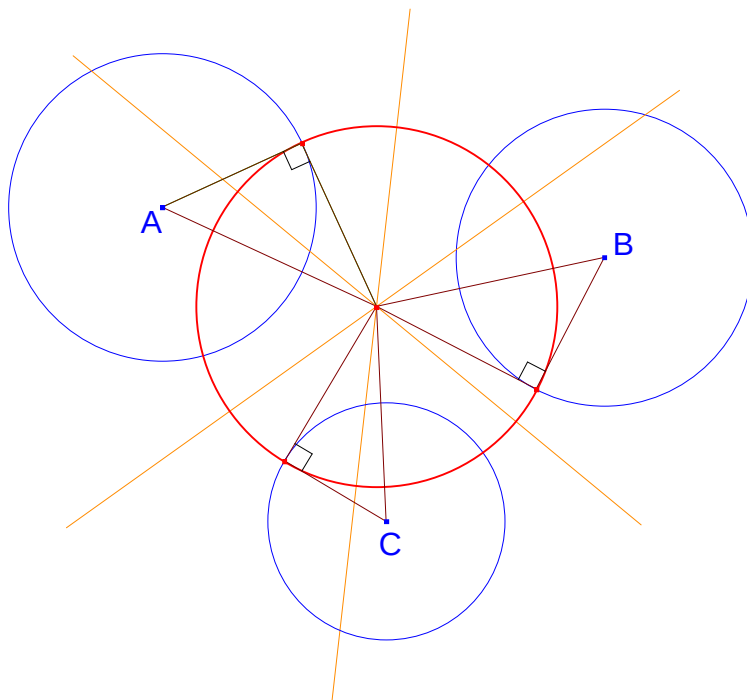


51. Construir una circunferencia que corte perpendicularmente a tres circunferencias dadas.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Sabemos que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan perpendicularmente a dos circunferencias dadas es el eje radical de las dos circunferencias. Por tanto, tomando dos a dos las tres circunferencias, el centro radical será el centro de la circunferencia buscada.



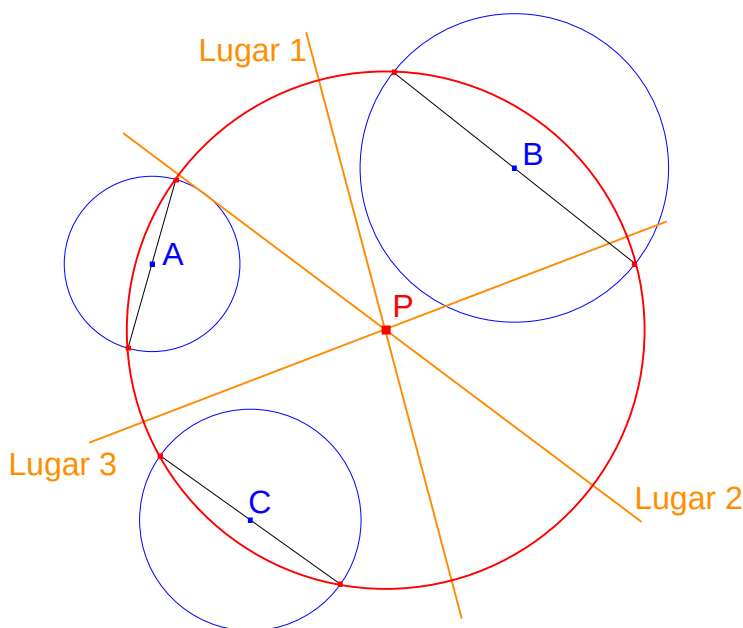
DISCUSIÓN: Cuando los centros de las tres circunferencias dadas estén alineados, los ejes radicales serán paralelos, por lo que el centro radical no existirá.

52. Construir una circunferencia que corte a tres circunferencias dadas según los diámetros.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Sabemos que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan a dos circunferencias dadas, a cada una según un diámetro, es una recta perpendicular a la recta que une los centros y a la misma distancia de uno de los centros que el eje radical lo está del otro.



Si las tres circunferencias tienen centros A, B, C y radios r, s, t , tendremos tres lugares geométricos, que serán rectas formadas por los puntos que cumplen las condiciones (1) $PA^2 + s^2 = PB^2 + r^2$, (2) $PB^2 + t^2 = PC^2 + s^2$ y (3) $PA^2 + t^2 = PC^2 + r^2$. Si un punto pertenece a dos de las rectas, también pertenecerá a la otra, por lo que las tres rectas se cortarán en un único punto P .

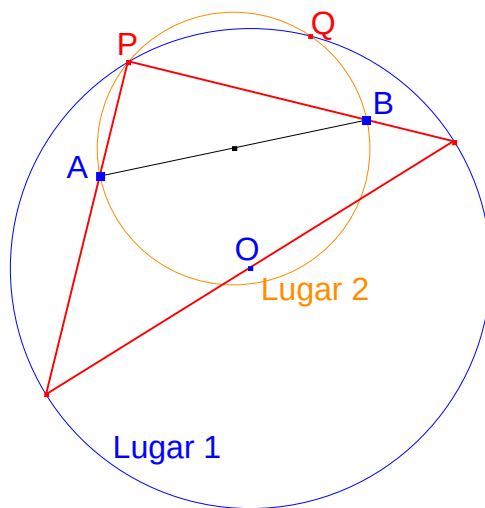
DISCUSIÓN: Si las tres circunferencias están centradas en puntos alineados, las tres rectas serán paralelas, por lo que el punto P no existirá y el problema carecerá de solución.

53. Inscribir un triángulo rectángulo en una circunferencia dada de manera que cada uno de los lados pase por un punto dado.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Partimos de una circunferencia con centro O y de dos puntos A y B en su interior. El vértice P del ángulo recto del triángulo buscado deberá estar en la circunferencia dada (Lugar 1) y también en la circunferencia con diámetro AB (Lugar 2), pues desde P se verá dicho diámetro bajo un ángulo recto. Por tanto, obtendremos P como intersección de estos dos lugares geométricos.



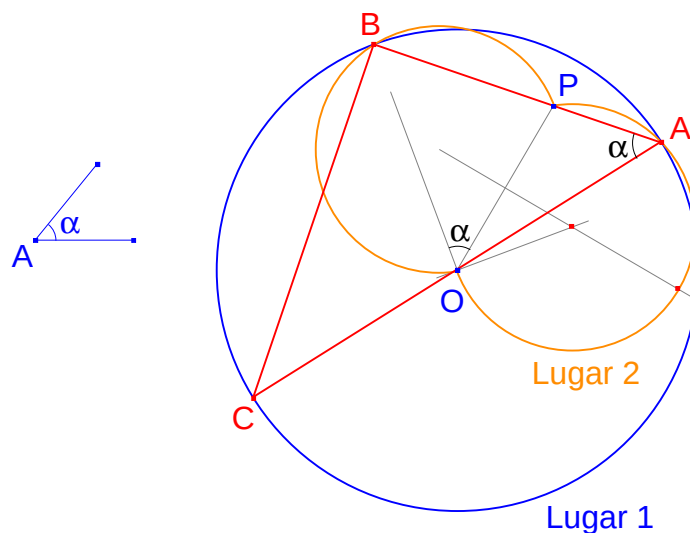
DISCUSIÓN: Al tratarse de la intersección de dos circunferencias, el problema puede tener dos soluciones, una o ninguna. Habrá solución única en el caso de que AB sea un diámetro de una circunferencia tangente interior a la dada.

54. En una circunferencia dada, inscribir un triángulo rectángulo, conociendo un ángulo agudo y un punto de uno de los lados.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: Sean α el ángulo agudo dado, P el punto dado, y O el centro de la circunferencia dada. Queremos inscribir en esta circunferencia un triángulo ABC de manera que P esté en AB y $\angle BAC = \alpha$. Entonces, el punto A deberá estar en la circunferencia dada (Lugar 1). Por otro lado, el segmento OP se verá desde A con bajo el ángulo A , por lo que A estará en un arco capaz del segmento OP para ese ángulo (Lugar 2). El punto P quedará determinado como intersección de los dos lugares geométricos.



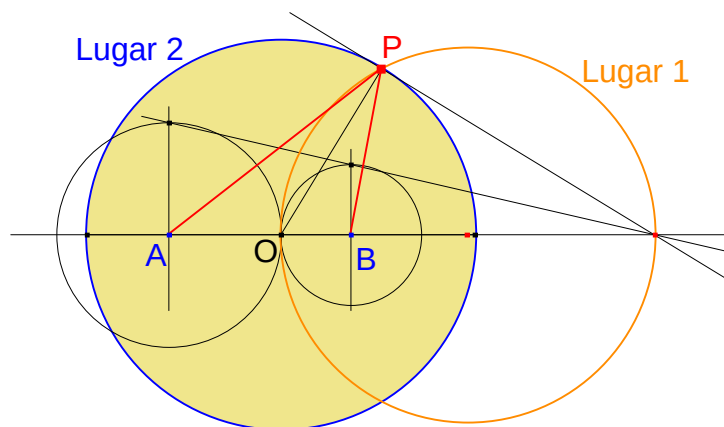
DISCUSIÓN: La intersección de la circunferencia dada con los dos arcos capaces puede dar lugar a cuatro puntos de intersección, a dos o a ninguno. Puede comprobarse que el caso de dos puntos de intersección, es decir, cuando los lugares geométricos son tangentes se da cuando $OP = r \sin \alpha$. Si OP es mayor que esta cantidad, hay dos puntos cuatro puntos de intersección, y si es menor no hay ninguno.

55. Dadas dos bolas sobre el mismo diámetro de un billar circular, determinar cómo debemos lanzar una de ellas para que, después de rebotar, se encuentre con la otra.

Julius Petersen (1879): *Métodos y Teoría para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas, con aplicación a más de 400 problemas.*

SOLUCIÓN

CONSTRUCCIÓN: En la figura, lanzamos la bola A hacia el punto P para que al rebotar, haga carambola con la bola B .



Considerando la ley de la reflexión y que la perpendicular al radio OP es la recta tangente a la circunferencia en P , OP debe ser la bisectriz del ángulo APB . Entonces tendremos

$$\frac{AP}{AO} = \frac{PB}{OB} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AO}{OB},$$

es decir, P debe estar en la circunferencia de Apolonio de $A, B, AO : OB$ (Lugar 1). Como P también debe estar en la circunferencia dada (Lugar 2), obtendremos P como intersección de dos lugares geométricos.

DISCUSIÓN: Los puntos A y B deben estar separados por el punto O . Si llamamos $a = OA$ y $b = OB$, la condición para que el problema tenga solución es que $2ab \geq |a - b|r$, correspondiendo la igualdad al caso en el que hay tangencia entre los dos lugares geométricos.