

## MATRICES

### CUESTIONES

- ◆ Si  $A$  es una matriz cuadrada  $n \times n$ , tal que  $A^2 = A$ , e  $I$  es la matriz unidad ( $n \times n$ ), ¿ qué matriz es  $B^2$ , si  $B = 2^a - I$ ?
- ◆ La multiplicación de matrices cuadradas, ¿ tiene la propiedad conmutativa? ¿ Y la de matrices regulares? Razonar y precisar las respuestas con ejemplos sencillos.
- ◆ ¿ Cómo deben ser las matrices rectangulares  $M$  y  $N$  para que puedan efectuarse las multiplicaciones  $MN$  y  $NM$ ? Razonarlo.
- ◆ Sea  $A$  la matriz de una sola fila  $( 2 \ 1 \ 5 )$  y  $B$  de una sola columna  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Escribe los productos  $AB$  y  $BA$ .

- ◆ ¿ Cuánto vale el rango de la siguiente matriz? ¿ Por qué?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ◆ Dada la matriz, comprueba que las dos primeras filas son independientes y que la tercera es combinación lineal de ellas. Razona el proceso utilizado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

- ◆ Se considera la matriz  $D = \text{Diag} ( 3,1,1 )$  ¿ cómo actúa  $D$  al multiplicarla por una matriz cualquiera  $A$ ? Compruébalo con una matriz  $A$  de orden 3.

- ◆ Se considera la matriz  $D = \text{Diag} ( 3,3,3 )$  ¿ cómo actúa  $D$  al multiplicarla por otra matriz  $A$ ? Compruébalo en el caso en que  $A$  sea una matriz de orden 3.
- ◆ Razona, aplicando la definición de producto de matrices , que una matriz que tenga una fila nula no tiene inversa. Poner un ejemplo tomando una matriz de orden 3.
- ◆ Demuestra que si  $A^2 = A$  y  $A \neq I$  , entonces  $A$  no tiene inversa.
- ◆ ¿ Qué dimensión tiene el espacio vectorial de las matrices de tres filas y tres columnas? Razona la contestación.
- ◆ Una matriz ¿ tiene siempre matriz inversa? Pon ejemplos que aclaren las respuestas.
- ◆ ¿Cuánto tiene que valer el rango de una matriz de orden 2 para que sea inversible? ¿ Y si la matriz es de orden 3? Razona la respuesta y pon un ejemplo.
- ◆ Dadas las matrices , decir cuáles de las siguientes matrices se pueden calcular:  $A+B$  ,  $A-B$  ,  $AB$  ,  $BA$  ,  $AA$  ,  $BB$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ◆ ¿ Por qué los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica han de ser nulos?

# SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

## CUESTIONES

- ◆ Enunciar, demostrar e interpretar el teorema de Rouché-Fröbenius.
- ◆ Dado un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas , escribe la matriz de los coeficientes, la matriz ampliada, la matriz de las incógnitas y la matriz de los términos independientes. ¿Existe alguna relación entre estas matrices? Si es así , ¿cuál es?
- ◆ Dado un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas , escribe los vectores columnas de las incógnitas y de los términos independientes. ¿ Qué combinación lineal relaciona a los vectores anteriores?
- ◆ Si el rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 2 , ¿puede ser compatible el sistema? ¿Puede ser compatible y determinado? ¿Puede ser incompatible? Razona tus respuestas , a ser posible con ejemplos concretos.
- ◆ Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es homogéneo; es decir, los términos independientes son nulos. Estudia la compatibilidad y soluciones del sistema en función del rango de la matriz de los coeficientes.
- ◆ Dado el sistema 
$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ m + z = 0 \end{cases}$$
 ¿ Es compatible? ¿ Existe algún valor de m para el cual tenga más de una solución? Resuélvelo en los casos de compatibilidad.
- ◆ ¿Qué es un sistema de Cramer? Pon un ejemplo de un sistema de Cramer de tres ecuaciones con tres incógnitas.

## DETERMINANTES

### CUESTIONES

- ◆ Escribe las permutaciones de 123 e indica razonadamente el signo + o - que le corresponde según el número de inversiones.
- ◆ En el desarrollo del determinante general de cuarto orden, determina razonadamente con qué signo figurarán los siguientes sumandos del mismo:  
 $a_{12} * a_{21} * a_{34} * a_{43}$        $a_{11} * a_{23} * a_{34} * a_{42}$        $a_{14} * a_{22} * a_{31} * a_{43}$
- ◆ ¿ Con qué signo figura en el determinante general de sexto orden el término  $a_{23} * a_{31} * a_{42} * a_{56} * a_{14} * a_{65}$ ? Razona la respuesta.
- ◆ Elige los subíndices i y j de modo que el producto  $a_{1i} * a_{25} * a_{32} * a_{4j} * a_{53}$  figure en el determinante general de quinto orden con el signo +.
- ◆ ¿ Con qué signo figura en el desarrollo del determinante general de orden ocho el producto de los elementos de la diagonal principal? ¿ Y el de la diagonal secundaria? Razona la respuesta.
- ◆ Un alumno dice que el número de sumandos distintos de cero en el desarrollo de un determinante de tercer orden es 2,4 ó 6. Razona la veracidad de esta afirmación. ¿ Cuándo es cierto? Pon ejemplos que aclaren el razonamiento utilizado.
- ◆ Otro alumno dice que el número de sumandos distintos de cero en el desarrollo de un determinante de cuarto orden es 6,12,18, ó 24. Razona la veracidad de esta afirmación. ¿ Cuándo es cierto? Pon ejemplos que aclaren el razonamiento utilizado.

- ◆ Consideremos un determinante de cuarto orden. ¿ En cuántos sumandos de su desarrollo aparece el elemento  $a_{11}$ ? ¿ Y el elemento  $a_{23}$ ? Razona las respuestas mediante la definición de determinante.
- ◆ Los elementos  $a_{11}$  y  $a_{12}$  de una matriz de cuarto orden son nulos y todos los demás elementos distintos de cero. ¿ Cuántos sumandos diferentes de cero tiene el desarrollo del determinante de esa matriz? Razona la respuesta.
- ◆ Los  $p$  primeros números de una fila de una matriz de orden  $n$  ( $p < n$ ) son nulos y todos los demás elementos de dicha matriz son distintos de cero. ¿ Cuántos sumandos no nulos tiene el desarrollo del determinante de esa matriz? Razona la respuesta.
- ◆ Una matriz cuadrada  $A$  verifica  $A^2 = AS$ . Demuestra que entonces  $\det(A) = 0$  ó  $\det(A) = 1$ . Razona la respuesta indicando qué propiedad se aplica.
- ◆ En un determinante realizamos una determinada permutación de las filas. ¿ Qué podemos decir del valor del nuevo determinante obtenido? Razona la respuesta.
- ◆ Un alumno suma y resta filas para simplificar los números que aparecen en un determinante. ¿ Puede hacerlo sin alterar el valor de dicho determinante? Pon un ejemplo.