OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Calcula las matrices X e Y sabiendo que $X+Y=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $2X-Y=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Obtén la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Obtén la matriz X tal que $XA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X-Y=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Por reducción, sumando ambas ecuaciones,

$$3X=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el valor de la matriz X *en la primera ecuación:* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+Y=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$Y=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $Y=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

b)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=6-4=2\neq 0, \text{ por lo que existe } A^{-1}$$

Calculemos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$

c) Buscamos una matriz $X \;/\; X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

Como conocemos A^{-1}*, multiplicando la expresión anterior por la derecha por* A^{-1}

$X \cdot A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$*, como* $A\ A^{-1} = I$

$X \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$*, como* $X\ I = X$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,.\,1 + 0\,.\,(-1) & 1\,.\,(-1) + 0\,.\,\frac{3}{2} \\ 8\,.\,1 + 6\,.\,(-1) & 8\,.\,(-1) + 6\,.\,\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$