PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1.- Queremos construir una caja abierta, de base cuadrada y volumen 256 l. Halla las dimensiones para que la superficie, y por tanto el coste, sea mínimo.

Sol: $x = 8,\ y = 4$

2.- Entre todos los rectángulos de área 16 halla el de perímetro mínimo.

Sol: $x = y = 4$

3.- La suma de las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 36. Halla las dimensiones para que el volumen sea máximo.

Sol: $x = 3;\ y = 3$

4.- En un círculo de diámetro 8 cm se divide éste en dos trozos que son también diámetros de otros dos círculos. Halla la medida de los trozos para que la diferencia entre el área del círculo grande y las de los dos pequeños sea máxima.

Sol: $d = d' = 4$ *cm.*

5.- De todos los cilindros inscritos en una esfera de radio 1 m, hallar el valor del volumen del que lo tenga máximo.

Sol: $V = 4\sqrt{3}/9\ \pi$

6.- Hallar los puntos de la curva $y^2 = x$ cuya distancia al punto (3/2,0) sea mínima.

Sol: $(1, \pm 1)$

7.- Una hoja de papel debe contener 288 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo?.

Sol: 28×14

8.- La vidriera de una iglesia está formada por un rectángulo y sobre él una semicircunferencia, si se quiere que el perímetro sea mínimo y que el área sea $8+2\pi$ m^2. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la vidriera?.

Sol: $x=4,\ y=2$ *m*

9.- Un ganadero quiere encerrar a sus ovejas en un redil rectangular de área máxima, para lo cual aprovecha la pared de la finca y con 100 metros de valla construye ese redil. Halla las dimensiones del rectángulo.

Sol: 25×50

10.- Entre los pares de números cuyo producto es 64 encuentra aquellos positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.

Sol: 8 *y* 8

11.- En un campo se quiere limitar una parcela de 24 m^2 por medio de una valla rectangular y además dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados.

¿Qué dimensiones deben elegirse para que la cantidad de valla sea mínima?

Sol: 6 m de largo por 4 m de ancho

12.- Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio $2\sqrt{2}$, ¿cuál es el de superficie máxima?.

Sol: Un cuadrado de lado 4

13.- Se quiere construir una caja partiendo de una lámina rectangular de 8x5 cm, recortando un cuadradito en cada esquina y doblando. Determina cuánto hay que cortar para que la caja tenga un volumen máximo.

Sol: x=1 cm

14.- La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 40 cm. Halla sus dimensiones para que la superficie de ese rectángulo sea máxima.

Sol: Dos catetos iguales de 20 cm

15.- Se quieren fabricar latas de refresco (cilíndricas) cuyo contenido sea de 1/3 de litro, de manera que el coste de la chapa sea mínimo; halla su altura y radio de la base. Mide las dimensiones de cualquier lata que tengas en casa y comprueba si se fabrican siguiendo ese criterio.

Sol: $R=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6\pi}}\ dm \quad h=\sqrt[3]{\dfrac{36}{27\pi}}$

16.- Un comerciante vende mensualmente 3000 latas de refresco a un precio de 60 céntimos/lata y sabe que por cada céntimo que rebaja en el precio vende 150 latas más, de la misma forma si aumenta el precio 1 céntimo vende 150 latas menos. Si al comerciante le cuesta cada lata 30 céntimos. ¿A qué precio ha de vender las latas para obtener el máximo beneficio?.

Sol: 55 céntimos

17.- Queremos vallar una parcela rectangular de 200 m2 de una finca aprovechando un muro ya existente, de modo que en ese lado no es necesaria valla. ¿Cómo debe ser ese rectángulo para que el coste de la valla sea mínimo?.

Sol: 10×20

18.- Un jardinero quiere construir un parterre con forma de sector circular. Lo quiere rodear con una valla. Si sólo dispone de 40 m, ¿cuál será el radio para que la superficie sea máxima?.

Sol: r=10m

19.- Se quiere vallar una parcela rectangular junto a una carretera. Si la valla junto a la carretera cuesta 1 euro/m y el resto 50 céntimos/m. ¿Cuáles serán las dimensiones de la parcela para que el área sea máxima si disponemos de 180 euros?.

Sol: 60×90 *m.*

20.- Hallar las dimensiones de un rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 2.

Sol: $x=\sqrt{8}$, $y=\sqrt{8}$

21.- De todos los triángulos isósceles de perímetro 9. Hallar las dimensiones del que tenga área máxima.

Sol: $x=3$, $y=3$

22.- Se desea abrir una ventana rectangular en una pared de una casa. Queremos que nos salga lo más económica posible sin perder luz, para ello pretendemos que el área sea de 16/15 m^2. Sabemos que el coste en vertical es de 50 €/m y en horizontal 30 €/m. ¿Cómo debe ser la ventana?.

Sol: $4/5 \times 4/3$

23.- Hallar dos números que sumen 18 y que su producto sea máximo.

Sol: 9 y 9

24.- Hallar dos números que sumen 9 y que el producto del cuadrado de uno por el triple del otro sea máximo.

Sol: $x=6$, $y=3$

+ PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

31. Con un alambre de 1 m queremos construir el borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones hay que dar al rectángulo?

32. Calcular dos números reales cuya suma sea 5 y su producto sea el mayor posible. Razonar la respuesta.

33. Indicar cuál es el triángulo de área máxima de entre todos los isósceles de perímetro 30 cm.

34. Hallar las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 500 m3 de capacidad que tenga un revestimiento de coste mínimo.

35. Se considera una ventana rectangular rematada en la parte superior un triángulo. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6.6 m. hallar sus dimensiones para que su superficie sea máxima.

36. Una ventana "normanda" consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de 10 m.

37. En una oficina de correos, solo se admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y además, la suma de ancho, alto y largo debe ser de 72 cm. Hallar las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.

38. Una hoja de papel debe contener 18 cm2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea el mínimo.

39. Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular. Si dispone de 20 m de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la mayor superficie posible?

40. Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm2 y volumen máximo. Determinar su generatriz y su radio.

41. Hallar el radio de la base y la altura de un cilindro inscrito en una esfera de radio R en cada uno de los casos siguientes:
    i. El volumen del cilindro es máximo
    ii. El área lateral del cilindro es máxima.

42. Un triángulo isósceles de perímetro 10 m gira alrededor de la altura relativa al lado no igual y, como todo triángulo que se precie y tal haga, engendra un cono. Hallar sus lados para que el cono tenga volumen máximo.

43. Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 l. Hallar las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

44. Determinar la distancia mínima del origen a la curva $xy = 1$.

45. Hallar los puntos de la curva $y^2 = 6x$ cuya distancia al punto $P(4, 0)$ sea mínima.

46. Hallar el punto de la parábola $y = x^2 + x$ que está mas cerca del punto $A(1, 0)$.

47. ¿Cuál es la mayor área que puede tener un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas inscrito en la elipse de ecuación $y = 4x^2 + y^2 = 1$?

48. Los márgenes de un río tienen por ecuaciones: $x – y = 2$, $x – y = -2$. Dos pueblos $A(-3, 2)$ y $B(4, 0)$, se van a unir por una línea de ferrocarril que cruzará el río perpendicularmente. ¿En qué puntos de ambas orillas se construirá el puente para que el trayecto sea mínimo?

49. Una piedra preciosa pesa 12 g. Sabiendo que el valor de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su peso y que su valor es de 144.000 PTA, calcular, cuando dicha piedra se divide en dos trozos, el valor de cada uno de ellos cuando la depreciación sea máxima.

50. En una carrera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 Km. de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A Y B y que le permite ir a una velocidad de 100 km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 Km., determinar la ruta que deberá usar para ir desde A hasta P en el menor tiempo posible.

51. A 10 Km. de tu casa te acuerdas de que te has dejado el agua corriendo, lo que te cuesta 10 PTA la hora. Volver a casa a una velocidad (constante) de x km/h te cuesta en combustible $9+(x/10)$ PTA por km.
    i. ¿Cuánto te cuesta volver a casa a x km/h (en combustible)?
    ii. ¿Cuánto tiempo tardas en llegar a casa si viajas a esa velocidad?
    iii. ¿Cuánto te cuesta el consumo de agua mientras regresas a casa?
    iv. ¿A qué velocidad debes regresar a casa para que el coste total de consumo de agua y combustible sea mínimo?

52. Una fábrica situada a 12 Km. de la orilla de un río rectilíneo, ha de transportar sus productos a una ciudad situada en la orilla del río y a 80 Km. del punto de éste más próximo de la fábrica. El transporte de mercancías en camión cuesta 130 PTA por tonelada y km y el transporte en gabarra por el río cuesta 50 PTA por tonelada y km. ¿En qué punto de la orilla se debería cargar la mercancía en gabarras para que el coste total de transporte sea mínimo?

53. Un granjero compra una ternera de 270 Kg. por 18.000 Pts. Alimentar al animal cuesta 15 pts al día y la ternera aumenta de peso 0.45 Kg. cada día. Por otro lado, cada día

que pasa, el valor del animal en el mercado disminuye, de modo que el valor al cabo de t días, dependiendo del peso del animal, es (100-(t/18)) pts por kilo. Calcular:

i. Peso de la ternera al cabo de t días.
ii. Valor total de la ternera en el mercado al cabo de t días.
iii. Coste total invertido en esos t días, incluyendo la compra y la alimentación.
iv. Ganancia obtenida por el granjero si vende la ternera a los t días (la ganancia será el valor de la ternera en ese instante menos los costes invertidos).
v. ¿Cuándo deben vender la ternera para obtener la máxima ganancia?

54. Se pretende fabricar una lata de conservas cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo de metal posible?

55. Una fábrica elabora un producto de dos calidades distintas: x toneladas de baja calidad e y toneladas de alta calidad, siendo y = (18-5x)/(10-x). Hallar la cantidad de toneladas del producto de baja calidad que ha de producir para obtener ingresos máximos si el precio por tonelada de éste es la mitad que el de alta calidad.

56. Un triángulo isósceles tiene su lado desigual de longitud 12 cm y la altura sobre dicho lado es 5 cm. Determina los puntos sobre esa altura tales que la suma de sus distancias a los tres vértices sea máxima y mínima respectivamente.

57. Si de un disco metálico quitamos un sector circular podemos construir un vaso cónico. Determinar el sector circular que debemos quitar para que el volumen del vaso sea máximo.

58. Se estima que el coste de una construcción de un edificio de oficinas que tiene n plantas es $C(n) = 2n^2 + 500n + 600$ cientos de euros. ¿Cuántas plantas deberá tener el edificio para que el coste medio por planta sea el menos posible?

59. Un campo de petróleo tiene 8 pozos que producen un total de 1.600 barriles de crudo al día. Por cada pozo nuevo que se perfora, la producción media por pozo disminuye en 10 barriles diarios. ¿Cuántos pozos adicionales se deben perforar para obtener la mayor producción de crudo al día?

60. El precio de cierto tipo de brillantes es proporcional a la potencia 5/3 del peso p. Si el brillante se parte en dos trozos de pesos *x* y *p-x* se deprecia. Calcular x para que la depreciación sea máxima. Si inicialmente el brillante tenia un precio de 12.000 €, indicar cuánto se ha depreciado.

61. Se desea construir con el mínimo coste una caja con base cuadrada y volumen 1000 cm^3. El precio de un cm^2 del material utilizado para la base y las caras laterales. Obtener, razonadamente, las dimensiones de la caja.

62. Una barra de 10 m de longitud se apoya en los puntos A(x,0) y B(0,y). Si el punto A se desliza por la parte positiva del eje OX alejándose del origen a 2m/s y el punto B se desliza sobre la parte positiva del eje OY se pide averiguar la velocidad del punto B cuando el punto A dista 8 m del origen de coordenadas.

63. Si se sustituye t por los valores 1, 2, … y 12 en la ecuación R = 3121 + 2399 sen(0.524t + 1377) donde 0.524t + 1377 está dado en radianes, se obtiene la cantidad mensual R de metros cúbicos de lluvia caídos en cierta zona en los meses de Enero, Febrero, … y Diciembre. Obtener, razonadamente, los meses de mayor pluviosidad y calcular aproximadamente por una integral la precipitación total anual, explicando la aproximación hecha.

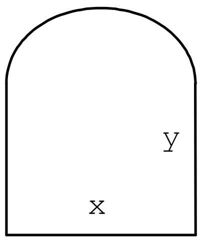
64. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable) dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y 120 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente a 40 y 30 Km. del punto de corte.
   i. Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido.
   ii. Hallar el valor mínimo de dicha distancia.

65. Se considera una caja sin tapadera (consta de cuatro caras laterales y el fondo). Sabiendo que el fondo es un cuadrado y conociendo que el área total (de las cinco caras) es de 12 cm^2, hallar sus dimensiones para que tenga la mayor capacidad posible.

66. Un comerciante vende determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 pesetas. No obstante, si se le encargan mas de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad y por cada x unidades cobra la siguiente cantidad:
$$c(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$
Se pide:
   i. Hallar a para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.
   ii. ¿ A cuanto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

67. Dos hermanos heredan una parcela que han de repartirse en partes iguales. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Deciden dividir la parcela mediante una recta $y = a$ paralela a la recta $y = 1$. Hallar el valor de a.

68. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (La parte inferior es rectangular, la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Hallar las dimensiones x e y para que la superficie de la ventana sea máxima. (Expresar los resultados en función de π).



69. Les vendes d'un article són funció del preu d'aquesta manera que $y = \dfrac{2000000}{(100+x)^2}$, x>0 on *x* és el preu en ptes/Kg i *y* el nombre de quilograms venuts setmanalment:
   i. Dibuixeu el gràfic d'aquesta funció.
   ii. El benefici (brut) setmanal s'obté multiplicant el preu pel nombre de Kg venuts. Calculeu el preu a què s'ha de vendre si es vol obtenir el benefici màxim i quin serà.

70. Quina mida fan el radi *r* i l'altura *h* del cilindre de volum 2 que té superfície mínima (comptant l'àrea de les bases i la de la superfície lateral)? El volum d'un cilindre és $\pi r^2 h$, i la superfície, $2\pi r^2 + 2\pi rh$

71. La població en milions d'habitants ve donada per la funció $P(t) = \frac{20(t-1)}{4+(t-1)^2} + 40$, t >0 on t és el temps en anys.

    i. Calculeu la població actual (per a t = 0), la població màxima i el límit de P(t) quan t tendeix a infinit.

    ii. Dibuixeu el gràfic de P(t).

72. Un agricultor ha recollit 10 tones de fruita que emmagatzemades, es deterioren a raó de 50 kg/dia. El seu preu actual de mercat és de 200 ptes./Kg, però el preu de la fruita augmenta 2 ptes./Kg cada dia. Quina quantitat de fruita li queda passats *t* dies? A quin preu es ven el kg en aquell moment? Quants dies ha d'esperar abans de vendre-la per obtenir el benefici més gran?

73. Certa substància és eliminada pel cos humà segons la llei $y(t) = y_0 e^{-at}$, on *y(t)* és la concentració en la sang a l'instant *t* hores i y_0 és la concentració inicial (quan t = 0).

    i. Indiqueu les propietats de la funció exponencial relacionades amb el producte, el quocient i la potenciació.

    ii. Determineu la constant a i el temps que trigarà la concentració a baixar fins al 10% de la inicial sabent que, per a t = 1, la concentració era d'un gram per litre i, per t = 2, havia baixat fins a 0.8 g/l

74. La cotització a borsa de les accions de certa empresa va seguir durant el 1991, aproximadament, l'evolució següent: $f(t)=342+39t-3t^2$ on *t* és el temps en mesos (0<t <12).

    i. Dibuixeu el gràfic de la funció f(t).

    ii. En quin mes es va atènyer la cotització màxima? Calculeu el percentatge de benefici que hauria obtingut un individu que hagués comprat accions en el moment de mínima cotització i que hagués venudes en el de màxima.

75. Suposem que, després de la ingestió d'una beguda alcohòlica (a l'instant en què t= 0), la concentració d'alcohol a la sang respon a la funció següent: $f(t) = t\, e^{1-t}$ grams/litre, on *t* s'expressa en hores.

    i. Escriviu la regla de la derivada d'un producte de funcions i utilitzeu-la per a calcular la derivada de la funció f(t).

    ii. Calculeu l'instant que serà màxima la concentració d'alcohol i el valor d'aquesta.

76. La població d'un estat és, en milions d'habitants, $P(t) = \frac{20}{4e^{\frac{-t}{100}} + 1}$, on *t* és el temps en anys. Calculeu-ne la població actual (per a t = 0) i la població límit que tindrà quan el temps tendeixi a infinit.

77. Una empresa fabrica galledes de plàstic fent servir una màquina embotidora. En la fabricació en sèrie el cost de cada galleda depèn del nombre de galledes de la sèrie segons la funció següent: $f(x)=\frac{3}{4}x+e^{\frac{-3}{4}x+\frac{1}{2}}$ on *x* representa centenars de galledes i *f(x)* representa centenars de pessetes.

   i. a/ Calculeu el cost de producció d'una galleda, si només en produïm una.

   ii. b/ Calculeu el nombre de galledes que cal produir - arrodoniu a l'enter més proper - per tal que el cost per galleda sigui mínim.

(Indicació: recordeu el valor de *a* per tal que $e^a = 1$)

78. Els guanys i pèrdues *f(x)*, en milions de pessetes, d'una empresa fundada fa dos anys segueixen l'evolució següent: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-2 & -2<x<-1\\ \frac{3x}{2x+4} & -1<x\end{cases}$ on *x* indica el nombre d'anys transcorreguts, si entenem *x=0* com el moment actual.

   i. a/ Representeu gràficament la funció f(x) i estudieu-ne la continuïtat.

   ii. b/ Indiqueu el moment que les pèrdues de l'empresa han estat més grans i la situació econòmica en què es troba l'empresa avui. (4p)

79. Volem comprar un terreny rectangular de 400 m^2. Encerclar-lo costa 1200 ptes. el metre de tanca. Calculeu la llargada i l'amplada que ha de tenir el terreny per tal que el cost sigui mínim. Calculeu quant costarà tancar-lo amb aquestes dimensions.

80. Calculeu dos nombres que sumin 8 i el producte dels quals sigui el més gran possible.

81. Les tarifes de taxi d'una ciutat indiquen que l'abaixament de bandera costa 250 pts., amb què podem recórrer fins a 500 m. A partir d'aquest moment, el taxímetre salta 25 pts., i torna a saltar 25 pts. per cada 20 m. recorreguts. Suposant que el taxi no s'atura en tot el viatge,

   i. Dibuixeu la funció y=f(x) que ens dóna el preu y que hem de pagar per a cada viatge de x metres, per a x entre 0 i 600 metres.

   ii. Quant hem de pagat per a un viatge de 585 metres? Quin interval de distàncies podem haver recorregut si hem pagat 325 pts.?

82. Trobeu el nombre positiu que en restar-li el seu quadrat s'obtingui la màxima diferència.

83. Una empresa de teixits estima que el seu balanç de guanys i pèrdues segueix la funció *f(x)* = ln(x+1)-x+2 on *x* representa els anys naturals a partir de la seva fundació (*x* =0: moment de la fundació de la empresa) i *y* els guanys o les pèrdues de l'empresa, en milions de pts.

   i. Indiqueu quin és el balanç de l'empresa en el moment de la seva fundació. En quin moment de la seva vida obtindrà el màxim benefici?

   ii. Feu servir un gràfic aproximat de la funció per saber si d'aquí a 10 anys l'empresa tindrà beneficis o pèrdues. Compraríeu accions d'una empresa com aquesta?

84. Suposem que podem modelitzar la relació entre la temperatura de l'aigua de mar i la fondària en una zona determinada mitjançant la funció: $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}$ on *x* representa la fondària en metres negatius (p. ej.: -4,5 m) i *f(x)* la temperatura corresponent.

    i. Indiqueu quina és la temperatura de l'aigua en superfície i a quines profunditats la temperatura és de 0 graus. Com evoluciona la temperatura de l'aigua a mesura que anem baixant?

    ii. Indiqueu a quina fondària la temperatura és més baixa i quina és aquesta temperatura.

85. El dipòsit d'aigua d'uns lavabos públics té una capacitat de 20 litres i el dispositiu funciona de la manera següent: l'aigua entra al dipòsit contínuament a raó de 2 litres per minut i quan el dipòsit és ple es buida de cop. Entenem que el buidatge és instantani.

    i. Dibuixeu el gràfic de la funció que ens dóna el contingut del dipòsit en funció del temps, des de l'instant t = 0, en què el dipòsit és buit, fins a t = 30 minuts. Quant val la derivada de la funció en l'instant t = 3 min?

    ii. Quin volum d'aigua conté el dipòsit al cap de 12 minuts? En quins punts la funció de l'apartat a) no és derivable? Justifiqueu la resposta.