TRIGONOMETRÍA

1– Razones trigonométricas de un ángulo

1. ¿Existe un ángulo "x" tal que senx=1/2 y cosx=1/4? ¿Puede valer el seno de un ángulo 1/8?.

Sol: no, si.

2. Calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo α: a) senα=1/4 y $\alpha \in$ al primer cuadrante; b) senα=-1/3 y $\alpha \in$ al tercer cuadrante.

Sol: a) $\cos\alpha=\sqrt{15}/4$, $tg\alpha=1/\sqrt{15}$; b) $\cos\alpha=-2\sqrt{2}/3$, $tg\alpha=\sqrt{2}/4$

3. Dibuja un ángulo cuyo seno sea el doble que su coseno.

4. Calcula en cada caso el valor de las demás razones trigonométricas considerando que x está en el primer cuadrante: a) senx=$\sqrt{3}/2$; b) cosx=0,8; c) tgx=2.

Sol: a) $\cos x=1/2$; $tg x=\sqrt{3}$; b) $\operatorname{sen} x=0,6$; $tg x=3/4$; c) $\operatorname{sen} x=2/\sqrt{5}$; $\cos x=1/\sqrt{5}$.

5. Calcula el seno, el coseno, la tangente, la contangente, la secante y la cosecante del ángulo de 1.110º.

Sol: $1110^o=30^o$; $\operatorname{sen}1110=1/2$, $\cos 1110=\sqrt{3}/2$, $tg1110=1/\sqrt{3}$, $cotg1110=\sqrt{3}$, $sec1110=2/\sqrt{3}$, $cosec1110=2$.

6. Dibuja ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima el valor de sus razones trigonométricas. a) senα=-1/2; tgα>0; b) tgβ=1; cos β<0.

Sol: a) 210^o; $\cos\alpha=-\sqrt{3}/2$, $tg\alpha=1/\sqrt{3}$; b) 225^o; $\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{2}/2$, $\cos\alpha=-\sqrt{2}/2$

7. Calcula senx, tgx, secx, cosecx, y cotgx, si cosx=0,6 y tgx<0.

Sol: senx=-0,8; tgx=-4/3, secx=5/3; cosecx=-5/4; cotgx=-3/4.

8. ¿Para qué angulos es senα=-cosα?.

Sol: 135^o y 315^o

9. Escribe en grados sexagesimales, centesimales y en radianes, el ángulo que forman las agujas del reloj cuando son: a) las 6:00; b) las 3:00; c) las 10:00.

Sol: a) 180^o, 200^o, πrad; b) 90^o, 100^o, $\pi/2$ rad; c) 60^o, $200/3^o$, $\pi/3$ rad

10. Expresa en grados sexagesimales: a) $\pi/4$ rad; b) $3\pi/4$ rad; c) $5\pi/4$ rad d) $4\pi/3$ rad.

Sol: a) 45^o; b) 135^o; c) 225^o; d) 240^o.

11. Completa la tabla:

Radianes	π/			π		4	5		π/	
Grados		3	5		2			3		0

Sol: $\pi/6$, $\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/6$, $3\pi/2$, 60^o, 180^o, 135^o, 225^o, 90^o

12. Halla las razones trigonométricas de α: a) $\cos\alpha=3/5$ y α pertenece al cuarto cuadrante; b) $\cos\alpha=-1/3$ y α pertenece al segundo cuadrante; c) $tg\alpha=-2/5$ y α pertenece al segundo cuadrante; d) $\sec\alpha=-3/2$ y α pertenece al tercer cuadrante.

Sol: a) $sen\alpha=-4/5$; $tg\alpha=-4/3$; b) $sen\alpha=2\sqrt{2}/3$, $tg\alpha=-2\sqrt{2}$; c) $sen\alpha=2/\sqrt{29}$, $\cos\alpha=-5/\sqrt{29}$; d) $sen\alpha=-\sqrt{5}/3$, $\cos\alpha=-2/3$

13. Puede ser cierto: a) $sen\alpha=1/5$ y $\cos\alpha=2/5$; b) $senx=1/3$ y $tgx=1/9$.

Sol: a) no; b) no

14. Si un ángulo está situado en el tercer cuadrante. ¿Qué signo tienen: la cotangente, la cosecante y la secante de ese ángulo?.

Sol: cotg(+), cosec(-), sec(-)

15. Si un ángulo está situado en el segundo o tercer cuadrante, ¿se puede asegurar que su tangente es negativa?.

Sol: en el 2º (-); en el 3º(+).

16. Si $tg\alpha=4$ y $\alpha\in[180,270]$, calcula el valor de las restantes razones trigonométricas:

Sol: $sen\alpha=-4/\sqrt{17}$; $\cos\alpha=-1/\sqrt{17}$.

17. Usando la calculadora resuelve: senx=0,6018; cosy=0,6428; tgz=2,7475; cotgα=2,1445.

Sol: $x=37º$; $y=50º$; $z=70º$; $\alpha=25º$.

18. Si el seno de α es 0,8 y el ángulo α no pertenece al primer cuadrante. Halla las demás razones trigonométricas.

Sol: $\cos\alpha=-0,6$; $tg\alpha=-4/3$

19. Si la tangente de α es 1/2 y el ángulo α pertenece al tercer cuadrante. Halla las demás razones trigonométricas

Sol: $\cos\alpha=-2/\sqrt{5}$; $sen\alpha=-1/\sqrt{5}$

20. Si $\sec\alpha = -2$ y α no pertenece al tercer cuadrante calcular el resto de las razones trigonométricas.

Sol: $sen\alpha=\sqrt{3}/2$; $\cos\alpha=-1/2$; $tg\alpha=-\sqrt{3}$

21. Si $tg\alpha=3/2$ y no pertenece al primer cuadrante halla las demás razones trigonométricas.

Sol: $sen\alpha=-3/\sqrt{13}$, $\cos\alpha=-2/\sqrt{13}$

22. Dibuja un ángulo agudo tal que su seno sea 3/5.

2– Razones trigonométricas en función de ángulos conocidos

23. Calcular en función de las razones trigonométricas de ángulos conocidos las razones de: 120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º, 330º.

Sol: sen120º=sen60º, cos120º=-cos60º; sen135º=sen45º, cos135º=-cos45º; sen150º=sen30º, cos150º=-cos30º; sen180º=sen0, cos180º=-cos0; sen210º=-sen30º, cos210º=-cos30º; sen225º=-sen45º, cos225º=-cos45º; sen240º=-sen60º, cos240º=-cos60º; sen270º=-sen90º, cos270º=-cos90º; sen300º=-sen60º, cos300º=cos60º; sen315º=-sen45º, cos315º=cos45º; sen330º=-sen30º, cos330º=cos30º

24. Calcular las razones trigonométricas de 15º en función de ángulos de razones conocidas.

Sol: sen(45-30), cos(45-30), tg(45-30)

25. Estudia que ángulos pueden tener las siguientes relaciones entre sus razones trigonométricas considerando que α pertenece al primer cuadrante: a) senα=senβ; b) cosα=-cosβ; c) senα=-cosβ; d) tgα=tgβ.

Sol: a) $\beta=180-\alpha$; b) $\beta=180-\alpha$ ó $\beta=180+\alpha$; c) $\beta=90+\alpha$ ó $270-\alpha$; d) $\beta=180+\alpha$

26. Sin utilizar la calculadora calcula las razones trigonométricas de los ángulos: a) 765º; b) –240º.

Sol: a) 765º=45º, sen765º=cos765º=$\sqrt{2}/2$; b) –240º=120º, sen(-240º)=$\sqrt{2}/2$, cos(-240)=-1/2

27. Sabiendo que sen 37º=0,6. Calcula las razones de 53º.

Sol: sen53=0,8; cos53=0,6; tg53=4/3

28. Sabiendo que cos 37º=0,8. Calcula las razones de 143º.

Sol: sen143=0,6; cos143=-0,8; tg143=-3/4

29. Sabiendo que el sen 20º=0,342. Calcula el seno del ángulo 40º.

Sol: 0,643.

30. Calcula las razones trigonométricas de 150 utilizando las razones del ángulo de 30º.

Sol: sen150=1/2, cos150=-$\sqrt{3}/2$; tg150=-$\sqrt{3}/3$.

31. Las razones trigonométricas del ángulo de 20º son: sen20º=0,342; cos20º=0,94; tg20º=0,364. Calcula las razones trigonométricas de 70º.

Sol: sen70º=0,94; cos70º=0,342; tg70º=2,75.

32. Las razones trigonométricas del ángulo de 53º son: sen 53º=0,8; cos 53º=0,6; tg 53º=4/3. Calcula las razones trigonométricas de 143º.

Sol: sen143º=0,6; cos143=-0,8; tg143=-3/4.

33. Si sen 12º=0,2 y sen 37º=0,6, calcula: a) sen49º, cos49º y tg49º b) sen25º, cos25º y tg25º.

Sol: a) sen49º=0,74; cos49º=0,656; tg49º=1,15; b) sen25º=0,42; cos25º=0,9; tg25º=0,47

34. Calcula las razones trigonométricas de 215º si tg35º=0,7.

Sol: sen215º=-0'57; cos215º=-0,82; tg215º=0,7.

35. Calcular las razones trigonométricas de: 150º, -225º, 480º, -660º, -1770º, 1440º.

Sol: $sen150^o=1/2$, $cos150^o=-\sqrt{3}/2$; $sen(-225^o)=\sqrt{2}/2$, $cos(-225^o)=-\sqrt{2}/2$; $sen480^o=\sqrt{3}/2$, $cos480^o=-1/2$; $sen(-660^o)=\sqrt{3}/2$, $cos(-660^o)=1/2$; $sen(-1770^o)=1/2$, $cos(-1770^o)=\sqrt{3}/2$; $sen1440^o=0$, $cos1440^o=1$

36. Si α es un ángulo del 2º cuadrante, tal que senα=3/5. Representar α, π-α, π+α, -α y calcular el seno de cada uno de ellos.

Sol: $sen(\pi-\alpha)=4/5$; $sen(\pi+\alpha)=-3/5$; $sen(-\alpha)=3/5$

37. Halla el ángulo complementario de 25º39'18". ¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y su complementario?.

Sol: 64º20'42"; $sen^2\alpha+sen^2(90-\alpha)=1$

38. Halla el ángulo suplementario de 135º38'16". ¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y el de su suplementario?.

Sol: 44º21'44", $sen\alpha=sen(180-\alpha)$

39. Sabiendo que senα= 4/5 y que α está en el primer cuadrante. Halla las razones trigonométricas de 2α y α/2.

Sol: $sen(2\alpha)=24/25$, $cos(2\alpha)=-7/25$; $sen(\alpha/2)=1/\sqrt{5}$, $cos(\alpha/2)= 2/\sqrt{5}$

40. Calcula las razones trigonométricas de –1200º, 570º y 10π/3 rad.

Sol: $sen(-1200)=-\sqrt{3}/2$, $cos(-1200)=-1/2$; $sen(570)=-1/2$, $cos(570)=-\sqrt{3}/2$; $sen(10\pi/3)=-\sqrt{3}/2$, $cos(10\pi/3)=-1/2$

41. Hallar las razones trigonométricas de 75º y 3000º.

Sol: $sen75=\sqrt{2}/4+\sqrt{6}/4$; $cos75=\sqrt{6}/4-\sqrt{2}/4$; $sen3000=\sqrt{3}/2$, $cos3000=-1/2$

42. Relaciona entre sí, las razones trigonométricas de los ángulos 3625º y 4025º.

Sol: $sen3625=cos4025$; $cos3625=sen4025$

43. Sabiendo que tgα=1/2, halla tg(α+45º) y tg(45-α).

Sol: $tg(\alpha+45)=3$; $tg(45-\alpha)=1/3$

44. Sabiendo que cos36º=0,8090. Halla las razones trigonométricas de los ángulos 9º y 6º.

Sol: $sen9^o=0,156$, $cos9=0,988$; $sen6=0,105$, $cos6=0,995$

45. Sabiendo que sen20º=0,342, calcula las razones trigonométricas de 40º.

Sol: $sen40=0,643$, $cos40=0,766$

46. Sabiendo que cosα=0,2, calcula las razones trigonométricas de ((π/2)-2α).

Sol: $sen((\pi/2)-2\alpha)=-0,92$; $cos((\pi/2)-2\alpha)=0,392$

47. Sabiendo que tgα=2, α pertenece al primer cuadrante, calcula sen3α.

Sol: $sen(3\alpha)=-2\sqrt{5}/25$

48. Sabiendo que tg2$\alpha=\sqrt{3}$ y que $\alpha<(\pi/2)$, halla el seno y coseno de α.

Sol: senα=1/2, cos$\alpha=\sqrt{3}/2$

49. Sabiendo que α es un ángulo situado en el segundo cuadrante y que tgα=-1/4, halla las razones trigonométricas de 2α.

Sol: sen(2α)=-8/17; cos(2α)=15/17

50. Sabiendo que tg(α/2)=2, Halla senα y cosα.

Sol: senα=4/5; cosα=-3/5

51. Sabiendo que tg($\alpha+\beta$)=-3 y que tgα=2. Halla tg2β y tg($\alpha-\beta$).

Sol: tg2$\beta=\infty$; tg($\alpha-\beta$)=1/3

52. Transforma en producto: a) sen60º-sen30º, b) cos60º-cos30º.

Sol: a) 2.sen15.cos45; b) -2.sen45.sen15

53. Calcula reduciendo al primer cuadrante las razones trigonométricas siguientes: a) sen150; b) cos135; c) tg300; d) sec225; e) cosec120; f) cotg240; g) sen750; h) cos(8π/3).

Sol: a) ½ b) $-\sqrt{2}/2$ c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{2}$ e) $2/\sqrt{3}$ f) $\sqrt{3}/3$ g) ½ h) -1/2.

54. Si sen 20º=0,34, calcula las razones trigonométricas de: a) 70º, b) 10º; c) 40º; d) 160º; e) 340º; f) 250º; g) 110º.

Sol: a) sen70=0,94, cos70=0,34, tg70=2,76; b) sen10=0,17, cos10=0,98, tg10=0,177; c) sen40=0,6392, cos40=0,7680, tg40=0,83; d) sen160=0,34, cos160=-0,94, tg160=-0,36; e) sen340=-0,34, cos340=-0,94, tg340=0,36; f) sen250=-0,94, cos250=-0,34, tg250=2,76; g) sen110=0,94, cos110=-0,34, tg110=-2,76.

55. Sin tablas ni calculadora, determina: a) sen105º, b) cos15º, c) tg75º.

Sol: a) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$; b) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$; c) $(\sqrt{3}+1)/(\sqrt{3}-1)$.

56. Halla las razones trigonométricas de 840º.

Sol: sen840=$\sqrt{3}/2$; cos840=-1/2; tg840=$-\sqrt{3}$.

57. Si α=60º. Calcula: a) tg(α/2); b) $\cos^2\alpha$; c) cos 4α; d) cos(α/2); e) (cosα)/2; f) sen 2α; g) 2senα.

Sol: a) $\sqrt{3}/3$; b) 1/4; c) -1/2; d) $\sqrt{3}/2$; e) 1/4; f) $\sqrt{3}/2$; g) $\sqrt{3}$

58. Si sen 37º=0,6. Calcula: a) sen(53); b) tg(37/2); c) sen(74); d) cos(127); e) tg(74).

Sol: a) 0,8; b) 1/3, c) 0,96; d) -0,6; e) 24/7.

Si llamamos sen 23º = A, expresa en función de A las siguientes razones trigonométricas.

tg 203º; sec(-23º); sen 67º; cos(157º); ctg(1913); cosec(-67º); sen 337º; cos(-337º); tg 383º;

Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo A en los siguientes casos:

a) sen(A+) = -1/5, si A está en el IV cuadrante.

b) cos A = 9/13, si A está en el I cuadrante.
c) tg(90-A) =-3/4, si A está en el II cuadrante.
d) sec(2+A) = -3, si A está en el II cuadrante.
e) tg(2-A) = 3, si A está en el II cuadrante.
f) cosec(2-A) = 2√2, si A está en el IV cuadrante.

Comprobar si son ciertas o falsas las siguientes igualdades trigonométricas.

a) ctg2β – cos2β = ctg2β·cos2β
b) cos2β·(1+tg2β) = ctgβ·tgβ
c) (1- senβ)·(1+senβ) = cos2β
d) tg2β – sen2β = tg2β·sen2β
f) (senβ +cosβ) 2 = 1+2 tgβ·cos2β

Si sen β = 2/3, β es un ángulo del II cuadrante y cos α = -4/5, α es un ángulo del III cuadrante. Calcular.

i) cos (α- β); v) sen (2α+ β);
ii) sen (α+ β); vi) cos (α+2β);
iii) tg 2β; vii) tg (α- β);
iv) sen 2β; viii) cos α/2;

Si β es un ángulo del IV cuadrante y cosβ=1/4. Calcular:
a) sen 2β; cos 2β; tg 2β;
b) sen 3β;
c) cos 4β;
d) tg (90+β) – tg β

3– Ecuaciones trigonométricas.

1. Resolver: a) sen2x=-1/2; b) cosx=√3/2; c) tgx=1; d) sen3x=√3/2.

Sol: a) x=105+180k; 165+180k; b) x=30+360k; 330+360k; c) x=45+180k; d) x=20+120k; 40+120k.

2. Resolver: a) sen(x-(π/3))=sen(2x+(π/3)); b) cos2x=cos(x+π/2); c) cos2x = cosx; d) sen2x=cosx.

Sol: a) x=60+120k, x=240+360k; b) x=π/2+2kπ, x=11π/6+2kπ/3; c) x=120k; d) x=30+120k.

3. Resolver: a) log(senx)-log(cosx)=0; b) cosx-2senx·cosx=0; c) sen^2x + cos2x = 1/4; d) tg^2x+2=3tgx; e) $sen^2x+cos^2x=2-cos^2x$.

Sol: a) x=45º+360k; b) x=90º+360k, x=30º+360k, 150+360k; c) x=60º+180k, x=120+180k; d) x=45º+180k, 63,43+180k; e) x=0+180k.

4. Resolver: a) $cos^2x=sen^2x$; b) senx=-cosx; c) sen(2x-15º)=cos(x+15º).

Sol: a) 45+90k; b) 135+180k; c) x=30º+120k, x=330º+360k

5. Resolver: a) tgα=2senα; b) $2sen^2x+cos^2x-3\sqrt{2}senx=0$; c) sen^2x-senx+1/4=0; d) cos^2x=(cosx)/2.

Sol: a) α=60+360k, α=300+360k, α=360k; b) x=45+360k, x=135+360k; c) x=30+360k, x=150+360k; d) x=90+180k, x=60+360k, x=300+360k

6. Resolver, sabiendo que x e y pertenecen al primer cuadrante:

a) cos(60+x)=sen x b) sen2x=tgx c) $4cos^2x$-4cosx+1=0

d) $\begin{cases} sen\,x + sen\,y = 1 \\ x + y = 90^o \end{cases}$ e) $\begin{cases} tg\,x + tg\,y = 1 \\ \cos(x+y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Sol: a) x=15º; b) x=0, x=45º; c) x=±60º; d) x=0, y=90º; x=90º, y=0; e) x=45º, y=0; x=0, y=45º

7. Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

a) cosx+√3senx=2 b) 4sen(x/2) + 2cosx = 2 c) 2sen(x+30º)·cos(x-30º)=√3
d) sen(x/2)=tg(x/4) e) log(tgx) + log(cosx) = log(1/2) f) 6 tgx = 3/cosx

Sol: a) x=60º+360k; b) x=180º+360k; c) x=60º+180k, x=30º+180k; d) x=180k; e) x=30º+360k; f) x=30º+360k, x=150+360k

8. Resuelve la ecuación $cos^2x=sen^2x$.

Sol: x=45+90k

9. Resolver:

a) senα=sen β b) cosα=cosβ c) tgα=tgβ d) senα=cosβ e) tgα=cotg β

Sol: a) α=β, α=180-β; b) α=β, α=-β; c) α=β, α=180+β; d) α=90-β, α=β-90; e) α=90-β

10. Resolver las ecuaciones:

a) senx=sen(x+(π/2)) b) senx=-sen(x+(π/2)) c) cos(2x)=cos(x+90º) d) sen3x=cos(2x+(π/3)) e) senx=cos2x f) tgx=tg(2x+π)

Sol: a) π/4+kπ; b) -π/4+kπ; c) x=π/6+2kπ/3, x=π/2+2kπ; d) π/30+2kπ/5; e) π/6+2kπ/3; f) kπ

11. Resolver la ecuación: sen(2x+(π/6))=cos((π/4)-x).

Sol: x=π/12=15º

12. Resolver: a) sen(3x-120º)=cos(x+15º); b) x=arsen0; c) x=arctg1; d) x = arcos(-1/2); e) senx·cosx=1/2; f) 2cos5x·sen2x=$\sqrt{2}$ ·cos5x; g) $\cos^2 x=\text{sen}^2 x$; h) senx=-cosx; i) cosx-2senx·cosx; j) cos2x=1+2senx; k) [senx+seny=1; senx-seny=0]; l) $tg^2x+3=4tgx$; m) $\text{sen}^2x+\cos 2x=1$; n) $6\cos^2x+\cos 2x=1$.

13. Resolver la ecuación: senx+(1/√3)cosx=0.

Sol: x=150+180k

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) senx·cosx=1/2 b) cosx·tgx=$\sqrt{3/2}$ c) sen2x=senx

d) $\sqrt{3}$+cosx=0 e) cos2x=sen(x+180º)

Sol: a) x=45+180k; b) x=60+360k, x=120+360k; c) x=180k, x=60+360k, x=300+360k; d) x=150+180k; e) x=90+360k, x=210+360k, x=330+360k

15. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} sen\,x + sen\,y = 1 \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos x \,.\, tg\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen(x+y) = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} sen\,x \,.\, sen\,y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \,.\, \cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} sen^2 x + \cos^2 y = 1 \\ -\cos^2 x + sen^2 y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ sen\,x + sen\,y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} sen\,x \,.\, sen\,y = \cos x \,.\, \cos y \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$

Sol: a) x=30º, y=30º; x=150º, y=150º; b) x=60º, y=30º; x=120º, y=330º; c) x=30º, y=30º; x=150º, y=150º; d) x=60, y=60; x=120, y=120; x=240, y=240; x=300, y=300, x=60, y=120...; e) x=90, y=30; x=30, y=90; f) x=60, y=30

16. Resuelve la ecuación: cos(2x)-2cosx+1=0.

Sol: x=π/2+2kπ; x=0+2kπ.

17. Despeja x en las siguientes igualdades: a) 2=2arctg(x/4); b) 1=$\sqrt{2}$ arcos(1/x).

Sol: a) x=π; x=5π; b) x=4/π; x=4/(7π)

18. Calcula arctg$\sqrt{3}$+arccotg(1/$\sqrt{3}$).

Sol: 60º+30º=90º

19. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} sen\,x + sen\,y = 1 \\ 2x + 2y = 120 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos x \,.\, tg\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen\,(x+y) = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \cos(x+y) = 0 \\ \cos(x-y) = 0 \end{cases}$

Sol: a) x=30º, y=30º b) x=60º, y=30º; x=120º, y=330º; c) x=90º, y=0; x=270º, y=0.

20. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) sen (x-30) = 1/2 b) cos (2x-30) = 1/2 c) sen (3x-30) = $\sqrt{3}$/2;

d) cos (3x-15) = $\sqrt{3}$/2 e) tg (x-45) = -1

Sol: a) x=60+360k; x=180+360k; b) x=45+180k; x=165+180k; c) x=30+120k; x=50+120k; d) x=15+120k; x=115+120k; e) x=180k.

21. Resuelve las expresiones:

a) sen 2x·cosx = 6sen^{3}x b) cosx = (2tgx)/(1+tg^{2}x) c) sen^{2}x-cos^{2}x = -1/2

d) cosecx.cosx=1 e) tgx·secx = 2 f) cos2x = 2cos^{2}x

Sol: a) x=180k; x=30+180k; x=150+180k; b) x=30+360k; x=150+360k; c) x=30+180k; x=150+180k; d) x=45+180k; e) x=60+360k; x=300+360k; f) x=60+180k; x=120+180k

22. Resuelve las ecuaciones: a) tgx=2senx b) 2tgx = 1/cos^{2}x c) sec(3x)=2/$\sqrt{3}$

Sol: a) x=180k, x=60+360k, x=300+360k; b) x=45+180k, x= 135+180k; c) x=10+120k; x=100+120k.

23. Resuelve las ecuaciones:

a) (4tgx)/(1-tg^{2}x) = 2/tgx b) cos2x+2cos^{2}x = 0 c) cos2x+senx = cosx.

Sol: a) x=30+180k; b) x=60º+360k; x=120+360k; c) x=30+360k; x=150+360k.

24. Despeja x en la expresión y=(1/ a)·sec(2-x). Sol: x=2-arccos[1/(ay)]

25. Resuelve la expresión sen4x+sen2x = 0. Sol: x=0+60k; x=90+180k

26. a) Hallar el valor de la siguiente expresión: arctg1 + arctg$\sqrt{3}$ -arcsen(sen(π/3));

b) Resuelve la ecuación: sen(2x+60) + sen(x+30) = 0.

Sol: a) π/4; b) x=-30+120k; x=150+360k.

27. Resuelve:

a) cos(2x-π)=0 b) sen(2x-(π/3))=1/2 c) 3senx=2cos^{2}x

d) tg(2x)=-1 e) 2 sen^{2}x-2$\sqrt{2}$ senx+1=0 f) tg^{2}x=3

Sol: a) x=π/4+kπ/2; b) x=π/4+kπ, x=7π/12+kπ; c) x=π/6+2kπ; d) x=11π/6+2kπ; e) x=π/4+2kπ; x=3π/4+2kπ

28. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) senβ = 1/2. c) ctgβ = √3/3 d) sen2β = 1

b) tgβ = 0. f) cosec β = 0 e) tgβ = √3

4– Demostrar identidades

1. Comprueba que son ciertas las expresiones:

   a) $\cos\alpha.\text{sen}^2\alpha+\cos^3\alpha=\text{tg}\alpha\cdot\text{cosec}\alpha$ b) $(\text{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=1+\text{sen}(2\alpha)$

   c) $\sec^2\alpha=(1+\text{tg}^2\alpha)$ d) $\cos^2\alpha=\text{cotg}^2\alpha/(1+\text{cotg}^2\alpha)$

   Sol: a) No; b) Sí; c) Sí; d) Sí

2. Comprueba que es cierta la igualdad: $(1/\cos^2 x)=1+\text{tg}^2 x$.
3. Comprueba si es cierta la igualdad: $(1/\cos x)-\cos x=\text{tg}x$.

   Sol: No

4. Decir si son ciertas o no las igualdades:

   a) $\cos(2x) = 2\cos x$ b) $\cos(\pi) = 2\cos(\pi/2)$ c) $\text{sen}2\pi=2\text{sen}\pi$

   d) $\cos 2\pi=2\cos\pi$ e) $\text{sen}(\pi/3)=2\text{sen}(\pi/6)$

   Sol: a) No; b) No; c) Sí; d) No; e) No

5. Demuestra que $\text{arcsen}(-x)=-\text{arcsen}x$ y que $\text{arctg}(-x)=-\text{arctg}x$.
6. Demuestra la igualdad: tg(45+ a)-tg(45- a)=2tg2a.
7. Demuestra la igualdad: a) $\text{sen}^2 x=1/2\ (1-\cos 2x)$; b) $\cos^2 x=1/2\ (1+\cos 2x)$.
8. Demuestra la igualdad: $(1+\cos 2x).\text{tg}x=2\text{sen}(2x)$.
9. Demuestra la igualdad: a) $\dfrac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = sen^2 x$; b) $\dfrac{1}{1+tg^2 x} = \cos^2 x$
10. Demuestra la igualdad: $\cos(x+45^\circ).(\cos x-\text{sen}x)= \sqrt{2}/2\ \cos 2x$.
11. Demuestra los teoremas del seno y del coseno.
12. Demuestra las siguientes igualdades:

    a) $\text{sen}(90+\alpha)\cdot\cos(-\alpha)+\text{sen}(180+\alpha)\cdot\cos(90+\alpha)=1$

    b) $\cos(-\alpha)\cdot\cos(180-\alpha)+\cos(90-\alpha)\cdot\text{sen}(-\alpha)=-1$

    c) $$\frac{tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-\cos x}{2}$$

    d) $$\frac{sen\,x - \text{cosec}\,x}{\cos x - \sec x}=cotg^3 x$$

13. Demuestra la igualdad: $\dfrac{\cos(x+y)\ .\ \cos(x-y)}{\cos x - sen\,y}=\cos x + sen\,y$
14. Demuestra la igualdad: $\text{sen}(\pi-\alpha).\text{sen}(\pi/2-\alpha)+\text{sen}(-\alpha).\cos(\pi+\alpha)=\text{sen}2\alpha$
15. Demuestra la igualdad: $\text{sen}(x/2).\cos(x/2)=(\text{sen}x)/2$
16. Demuestra la identidad: $\text{sen}2\alpha = (\text{sen}\,\alpha + \cos\,\alpha)^2$
17. Demuestra que $\cos 4\,\alpha - \text{sen}4\,\alpha = \cos 2\alpha$

18. Expresa cos(30°+x) en términos de sen x y cos x.
19. Expresa tg (45°+x) en términos de tg (x).
20. Utiliza la fórmula cos(x+y) para hallar el valor exacto de 105°.
21. Demuestra las siguientes identidades:

    sen(a+b) · sen(a-b) = sen2a - sen2b

    sen(a+b) · sen(a-b) = cos2a - cos2b

22. Expresar cos 3a en función de sen a y cos a.
23. Obtener una fórmula para cos 4a en términos de cos a.
24. Si tg a= 1.6 . Calcular tg 2a y tg 3a.
25. Calcular sen (a+b+c) en función de las razones trigonométricas de a, b y c.

5– Representación de funciones y deducciones

1. Calcula el dominio, imagen, periodicidad, máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento de: y=senx; y=cosx; y=tgx.
2. Dibuja la gráfica de la función sen2x.
3. Representa la función y=senx+2
4. Halla el dominio de las funciones a) y=cosx; b) y=arcosx.

Sol: a) Dom=x∈R; b) Dom=[-1,1]

5. Deducir las siguientes razones trigonométricas: a) razones del ángulo (a+ b); b) razones del ángulo (a- b); c) razones del ángulo mitad (x/2); d) razones del ángulo doble (2x).
6. Deducir las razones trigonométricas de 30º y 60º a partir de un triángulo equilátero de lado l.
7. Deducir las razones de 45º a partir de un cuadrado de lado l.
8. Expresa sen3α en función de senα.

Sol: $sen3\alpha=3sen\alpha-4sen^3\alpha$